KOMBINATORIAL

DEFINISI

- Kombinatorial adalah cabang matematika untuk menghitung jumlah penyusunan objek-objek tanpa harus mengenumerasi semua kemungkinan susunannya.

ENUMERASI

Sebuah sandi-lewat (*password*) panjangnya 6 sampai 8 karakter. Karakter boleh berupa huruf atau angka. Berapa banyak kemungkinan sandi-lewat yang dapat dibuat?

- abcdef
- aaaade
- a123fr
- …
- erhtgahn
- yutresik
- …
-
- ????

Kaidah Dasar Menghitung

1. Kaidah perkalian

   (*rule of product*)

2. Kaidah penjumlahan

   (*rule of sum*)

Kaidah perkalian (*rule of product*)

Misalkan,

Percobaan 1: p hasil

Percobaan 2: q hasil

maka,

Percobaan 1 dan percobaan 2:

$$\boldsymbol{p \times q} \textbf{ hasil}$$

Kaidah penjumlahan (*rule of sum*)

Misalkan,

Percobaan 1: p hasil

Percobaan 2: q hasil

maka,

Percobaan 1 atau percobaan 2:

$p + q$ hasil

Contoh

- Ketua kelas A hanya 1 orang (pria “atau” wanita, tidak bias gender). Jumlah pria = 65 orang dan jumlah wanita = 15 orang. Berapa banyak cara memilih ketua kelas?
- Penyelesaian:

  65 + 15 = 80 cara.

Contoh

- Dua orang perwakilan mendatangai dosen untuk protes nilai kuis. Wakil yang dipilih 1 orang pria “dan” 1 orang wanita. Berapa banyak cara memilih 2 orang wakil tersebut?
- Penyelesaian:

  $65 \times 15 = 975$ cara.

Perluasan Kaidah Dasar Menghitung

Misalkan ada *n* percobaan, masing-masing dg p_i hasil

1. Kaidah perkalian (*rule of product*)

$$p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_n \text{ hasil}$$

2. Kaidah penjumlahan (*rule of sum*)

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n \text{ hasil}$$

Contoh

Bit biner hanya 0 dan 1. Berapa banyak *string* biner yang dapat dibentuk jika:

- panjang *string* 5 bit
- panjang *string* 8 bit (= 1 *byte*)

Penyelesaian:

- $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 = 32$ buah
- $2^8 = 256$ buah

Contoh

Berapa banyak bilangan ganjil antara 1000 dan 9999 (termasuk 1000 dan 9999 itu sendiri) yang semua angkanya berbeda

- Penyelesaian:
  - posisi satuan : 5 kemungkinan angka (yaitu 1, 3, 5, 7 dan 9)
  - posisi ribuan : 8 kemungkinan angka
  - posisi ratusan : 8 kemungkinan angka
  - posisi puluhan : 7 kemungkinan angka

Banyak bilangan ganjil seluruhnya

= (5)(8)(8)(7) = 2240 buah.

Berapa banyak bilangan ganjil antara 1000 dan 9999 (termasuk 1000 dan 9999 itu sendiri) yang boleh ada angka yang berulang.

Contoh

Penyelesaian:

- posisi satuan : 5 kemungkinan angka (yaitu 1, 3, 5, 7 dan 9);
- posisi ribuan : 9 kemungkinan angka (1 sampai 9)
- posisi ratusan : 10 kemungkinan angka (0 sampai 9)
- posisi puluhan : 10 kemungkinan angka (0 sampai 9)

Banyak bilangan ganjil seluruhnya =

(5)(9)(10)(10) = 4500

Contoh

Lihat kembali contoh ilustrasi pada awal bab ini. Sandi-lewat (*password*) sistem komputer panjangnya enam sampai delapan karakter. Tiap karakter boleh berupa huruf atau angka; huruf besar dan huruf kecil tidak dibedakan. Berapa banyak sandi-lewat yang dapat dibuat?

- <u>Penyelesaian</u>:

  Banyaknya huruf alfabet adalah 26 (A-Z) dan banyak angka desimal adalah 10 (0-9), jadi seluruhnya 36 karakter.

  - Untuk sandi-lewat dengan panjang 6 karakter, jumlah kemungkinan sandi-lewat adalah (36)(36)(36)(36)(36)(36) = 36^6 = 2.176.782.336
  - Untuk sandi-lewat dengan panjang 7 karakter, jumlah kemungkinan sandi-lewat adalah(36)(36)(36)(36)(36)(36)(36) = 36^7 = 78.364.164.096

Contoh (lanjutan)

- Untuk sandi-lewat dengan panjang 8 karakter, jumlah kemungkinan sandi-lewat adalah (36)(36)(36)(36)(36)(36)(36)(36) = 36^8 = 2.821.109.907.456

Jadi jumlah seluruh sandi-lewat (kaidah penjumlahan) adalah

2.176.782.336 + 78.364.164.096 + 2.821.109.907.456=

2.901.650.833.888 buah.

Prinsip Inklusi-Eksklusi

Setiap *byte* disusun oleh 8-bit. Berapa banyak jumlah *byte* yang dimulai dengan ‘11’ atau berakhir dengan ‘11’?

- Penyelesaian:

Misalkan

A = himpunan *byte* yang dimulai dengan ‘11’,

B = himpunan *byte* yang diakhiri dengan ‘11’

$A \cap B$ = himpunan *byte* yang berawal dan berakhir dengan ‘11’

Prinsip Inklusi-Eksklusi

maka

$A \cup B$ = himpunan *byte* yang berawal dengan '11' atau berakhir dengan '11'

$|A| = 2^6 = 64,$

$|B| = 2^6 = 64,$

$|A \cap B| = 2^4 = 16.$

maka

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$
$$= 2^6 + 2^6 - 16 \quad = 64 + 64 - 16 = 112.$$

Latihan

- Pelat nomor memuat 2 huruf (boleh sama)diikuti 3 angka dengan digit pertama tidak sama dengan 0(boleh ada angka yang sama). Ada berapa pelat nomor berbeda

Latihan

- 26x26x9x10x10=608400

- Pelat nomor memuat 2 huruf berbeda diikuti 3 angka berbeda. Ada berapa pelat nomor berbeda?

- 26x25x10x9x8=468000

Latihan

- Pelat nomor memuat 2 huruf berbeda diikuti 3 angka berbeda dengan digit pertama tidak sama dengan 0. Ada berapa pelat nomor berbeda

Latihan

- 26x25x9x9x8=421200

- Tentukan n cara agar sebuah organisasi yang terdiri dari 26 anggota dapat memilih ketua,sekretaris dan bendahara dgn catatan tidak ada jabatan rangkap)

Latihan

- 26x25x24=15600

- Terdapat 4 jalur bus antara A dan B dan 3 jalur bus dari B ke C. Tentukan banyaknya cara agar seseorang dapat bepergian dengan bus dari A ke C melewati B

Latihan

- 4x3=12

- Terdapat 4 jalur bus antara A dan B dan 3 jalur bus dari B ke C. Tentukan banyaknya cara agar seseorang dapat pulang pergi dengan bus dari A ke C melewati B

Latihan

- 12x12=144
- Terdapat 4 jalur bus antara A dan B dan 3 jalur bus dari B ke C. Tentukan banyaknya cara agar seseorang dapat pulang pergi dengan bus dari A ke C melewati B dan tidak ingin melewati satu jalur lebih dari sekali?

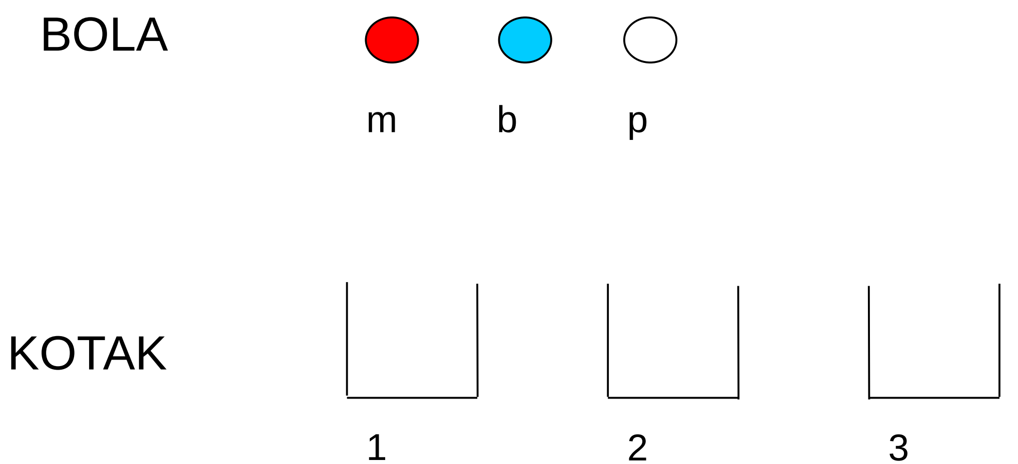
- $4 \times 3 \times 2 \times 3 = 72$

DEFINISI

- Permutasi adalah jumlah urutan berbeda dari pengaturan objek-objek.

Permutasi

- Berapa jumlah urutan berbeda yang mungkin dibuat dari penempatan bola merah, biru, putih ke dalam kotak 1,2,3 ?



KOTAK 1	KOTAK 2	KOTAK 3	URUTAN
m	b	p	mbp
	p	b	mpb
b	m	p	bmp
	p	m	bpm
p	m	b	pmb
	b	m	pbm

Jumlah kemungkinan urutan berbeda dari penempatan bola ke dalam kotak adalah (3)(2)(1) = 3! = 6.

Permutasi

Permutasi merupakan bentuk khusus aplikasi kaidah perkalian.

Misalkan jumlah objek adalah *n*, maka
urutan pertama dipilih dari *n* objek,
urutan kedua dipilih dari *n* – 1 objek,
urutan ketiga dipilih dari *n* – 2 objek,
…
urutan terakhir dipilih dari 1 objek yang tersisa.
Menurut kaidah perkalian, permutasi dari *n* objek adalah

$$\boldsymbol{n(n - 1)(n - 2) \ldots (2)(1) = n!}$$

Contoh

- Berapa banyak “kata” yang terbentuk dari kata “HAPUS”?
- <u>Penyelesaian</u>:

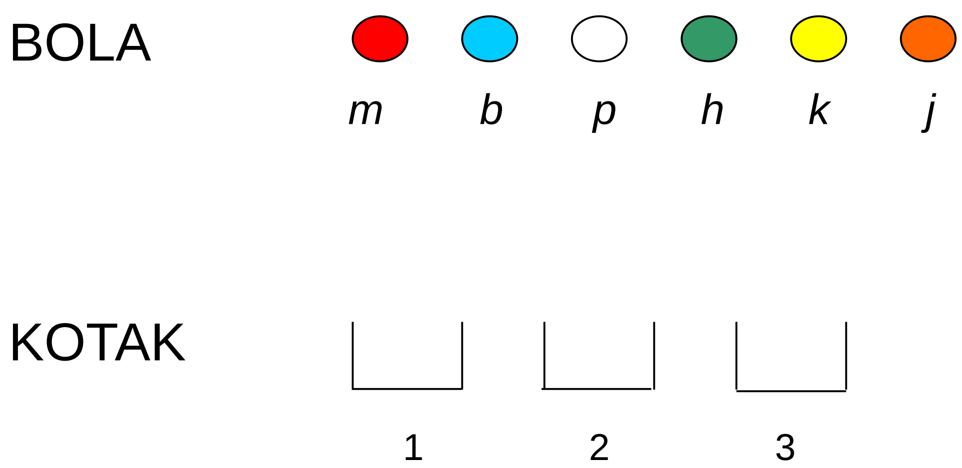
  Cara 1: (5)(4)(3)(2)(1) = 120 buah kata

  Cara 2: $P(5, 5) = 5! = 120$ buah kata

- Berapa banyak cara mengurutkan nama 25 orang mahasiswa?
- <u>Penyelesaian</u>: $P(25, 25) = 25!$

Permutasi *r* dari *n* elemen

Ada enam buah bola yang berbeda warnanya dan 3 buah kotak. Masing-masing kotak hanya boleh diisi 1 buah bola. Berapa jumlah urutan berbeda yang mungkin dibuat dari penempatan bola ke dalam kotak-kotak tersebut?



Permutasi *r* dari *n* elemen

- Penyelesaian:
  - kotak 1 dapat diisi oleh salah satu dari 6 bola (ada 6 pilihan);
  - kotak 2 dapat diisi oleh salah satu dari 5 bola (ada 5 pilihan);
  - kotak 3 dapat diisi oleh salah satu dari 4 bola (ada 4 pilihan).

Jumlah urutan berbeda dari penempatan bola = (6)(5)(4) = 120

Permutasi *r* dari *n* elemen

Perampatan:

Ada n buah bola yang berbeda warnanya dan r buah kotak ($r \leq n$), maka

- kotak ke-1 dapat diisi oleh salah satu dari n bola (ada n pilihan)
- kotak ke-2 dapat diisi oleh salah satu dari $(n - 1)$ bola (ada $n - 1$ pilihan)
- kotak ke-3 dapat diisi oleh salah satu dari $(n - 2)$ bola (ada $n - 2$) pilihan;
- ……….
- kotak ke-r dapat diisi oleh salah satu dari $(n - (r - 1))$ bola (ada $n - r + 1$ pilihan);

Jumlah urutan berbeda dari penempatan bola adalah:

$$\boldsymbol{n(n - 1)(n - 2)\ldots(n - (r - 1))}$$

Permutasi *r* dari *n* elemen

- RUMUS

$$P(n,r) = n(n-1)(n-2)...(n-(r-1))$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!}$$

Contoh

Berapakah jumlah kemungkinan membentuk 3 angka dari 5 angka berikut: 1, 2, 3, 4 , 5, jika:

(a) tidak boleh ada pengulangan angka, dan

(b) boleh ada pengulangan angka.

- Penyelesaian:

(a) Dengan kaidah perkalian: (5)(4)(3) = 120 buah

Dengan rumus permutasi P(5, 3) = 5!/(5 – 3)! = 120

(b) Tidak dapat diselesaikan dengan rumus permutasi.

Dengan kiadah perkalian: (5)(5)(5) = 53 = 125.

Permutasi *r* dari *n* elemen

- **Definisi**

  Permutasi *r* dari *n* elemen adalah jumlah kemungkinan urutan *r* buah elemen yang dipilih dari *n* buah elemen, dengan $r \leq n$, yang dalam hal ini, pada setiap kemungkinan urutan tidak ada elemen yang sama.

Permutasi dengan pengulangan

- Banyaknya permutasi dari n objek dari n_1 yang sama, n_2 yang sama,……., n_r yang sama adalah

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_r!}$$

Contoh

- Tentukan banyaknya kata yang dapat dibentuk dari kata “DISKRIT”
- 7!/2!
- Tentukan banyaknya kata yang dapat dibentuk dari kata “MATEMATIKA”
- 10!/2!3!2!

Contoh

Kode buku di sebuah perpustakaan panjangnya 7 karakter, terdiri dari 4 huruf berbeda dan diikuti dengan 3 angka yang berbeda pula?

- Penyelesaian:

$P(26, 4) \times P(10,3) = 258.336.000$

Latihan

- Berapa banyak bilangan berdigit 3 yang bisa dibentuk dari 6 angka 2,3,4,5,7,9 dan pengulangan tidak diperbolehkan?

- Permutasi

  $\frac{n!}{(n-r)!}$ = (6x5x4x3x2x1)/(3x2x1)=120
- Kaidah Perkalian

  = 6x5x4 = 120

Latihan

- Berapa banyak bilangan berdigit 3 yang kurang dari 400 yang bisa dibentuk dari 6 angka 2,3,4,5,7,9 dan pengulangan tidak diperbolehkan?

Latihan

- 2x5x4=40
- Berapa banyak bilangan berdigit 3 yang genap dan bisa dibentuk dari 6 angka 2,3,4,5,7,9 dan pengulangan tidak diperbolehkan?

Latihan

- 5x4x2=40

- Berapa banyak bilangan berdigit 3 yang ganjil dan bisa dibentuk dari 6 angka 2,3,4,5,7,9 dan pengulangan tidak diperbolehkan?

Latihan

- 5x4x4=80

- Berapa banyak bilangan berdigit 3 yang dapat dibagi 5 dan bisa dibentuk dari 6 angka 2,3,4,5,7,9 dan pengulangan tidak diperbolehkan?

- $5x4x1=20$

Latihan

- Berapa banyak bilangan berdigit 3 yang bisa dibentuk dari 6 angka 2,3,4,5,7,9 dan pengulangan diperbolehkan?

- Kaidah Perkalian

  $= 6 \times 6 \times 6 = 216$

Latihan

- Berapa banyak bilangan berdigit 3 yang kurang dari 400 yang bisa dibentuk dari 6 angka 2,3,4,5,7,9 dan pengulangan diperbolehkan?

Latihan

- 2x6x6=72

- Berapa banyak bilangan berdigit 3 yang genap dan bisa dibentuk dari 6 angka 2,3,4,5,7,9 dan pengulangan diperbolehkan?

Latihan

- 6x6x2=72

- Berapa banyak bilangan berdigit 3 yang ganjil dan bisa dibentuk dari 6 angka 2,3,4,5,7,9 dan pengulangan diperbolehkan?

Latihan

- 6x6x4=144

- Berapa banyak bilangan berdigit 3 yang dapat dibagi 5 dan bisa dibentuk dari 6 angka 2,3,4,5,7,9 dan pengulangan diperbolehkan?

- $6 \times 6 \times 1 = 36$

Latihan

- Tentukan banyaknya cara agar 7 orang dapat mengatur dirinya dalam 1 barisan yang terdiri dari 7 kursi

- $n(n - 1)\ (n - 2)\ \ldots\ (2)(1) = n!$

  $=7x6x5x4x3x2x1$

Latihan

- Tentukan banyaknya cara agar 7 orang dapat mengatur dirinya duduk mengelilingi meja bundar yang terdiri dari 7 kursi

- 1x6x5x4x3x2x1=6!

Kombinasi

- Bentuk khusus dari permutasi adalah kombinasi. Jika pada permutasi urutan kemunculan diperhitungkan, maka pada kombinasi, urutan kemunculan diabaikan.

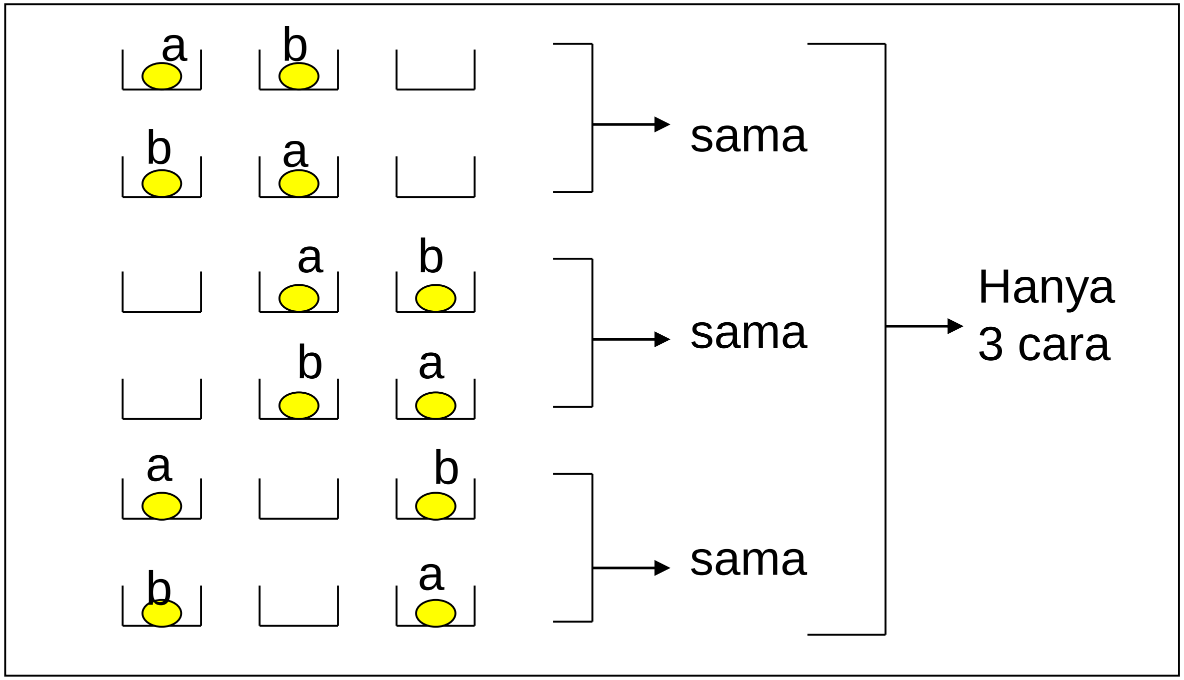
Kombinasi

- Misalkan ada 2 buah bola yang warnanya sama dan ada 3 buah kotak. Setiap kotak hanya boleh berisi paling banyak 1 bola.
- Jumlah cara memasukkan bola ke dalam kotak

$$= \frac{P(3,2)}{2!} = \frac{\frac{3!}{1!}}{2!} = \frac{(3)(2)}{2} = 3$$

Kombinasi

Ilustrasi



Kombinasi

- Bila sekarang jumlah bola 3 dan jumlah kotak 10, maka jumlah cara memasukkan bola ke dalam kotak adalah

$$\frac{P(10,3)}{3!} = \frac{\frac{10!}{7!}}{3!} = \frac{(10)(9)(8)}{3!}$$

karena ada 3! cara memasukkan bola yang warnanya sama.

Kombinasi

- Secara umum, jumlah cara memasukkan *r* buah bola yang berwarna sama ke dalam *n* buah kotak adalah

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(r-1))}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = C(n,r) = \binom{n}{r}$$

Definisi

- Kombinasi r elemen dari n elemen, atau $C(n, r)$, adalah jumlah pemilihan yang tidak terurut r elemen yang diambil dari n buah elemen.

Interpretasi Kombinasi

1. *C*(*n*, *r*) = banyaknya himpunan bagian yang terdiri dari *r* elemen yang dapat dibentuk dari himpunan dengan *n* elemen.

Misalkan *A* = {1, 2, 3}

Jumlah Himpunan bagian dengan 2 elemen:

$$\left.\begin{array}{l}\{1, 2\} = \{2, 1\}\\ \{1, 3\} = \{3, 1\}\\ \{2, 3\} = \{3, 2\}\end{array}\right\rangle \text{3 buah atau } \binom{3}{2} = \frac{3!}{(3-2)!2!} = \frac{3!}{1!2!} = 3$$

Interpretasi Kombinasi

2. $C(n, r)$ = cara memilih r buah elemen dari n buah elemen yang ada, tetapi urutan elemen di dalam susunan hasil pemilihan tidak penting.

Contoh: Berapa banyak cara membentuk panitia (komite, komisi, dsb) yang beranggotakan 5 orang orang dari sebuah fraksi di DPR yang beranggotakan 25 orang?

Interpretasi Kombinasi

Penyelesaian:

Panitia atau komite adalah kelompok yang tidak terurut, artinya setiap anggota di dalam panitia kedudukannya sama.

Misal lima orang yang dipilih, A, B, C, D, dan E, maka urutan penempatan masing-masingnya di dalam panitia tidak penting (ABCDE sama saja dengan BACED, ADCEB, dan seterusnya). Banyaknya cara memilih anggota panitia yang terdiri dari 5 orang anggota adalah $C(25,5) = 53130$ cara.

Contoh

Di antara 10 orang mahasiswa Teknik Elektro Angkatan 2004, berapa banyak cara membentuk sebuah perwakilan beranggotakan 5 orang sedemikian sehingga:

1. mahasiswa bernama *A* selalu termasuk di dalamnya;
2. mahasiswa bernama *A* tidak termasuk di dalamnya;
3. mahasiswa bernama *A* selalu termasuk di dalamnya, tetapi *B* tidak;
4. mahasiswa bernama *B* selalu termasuk di dalamnya, tetapi *A* tidak;
5. mahasiswa bernama *A* dan *B* termasuk di dalamnya;
6. setidaknya salah satu dari mahasiswa yang bernama *A* atau *B* termasuk di dalamnya.

Contoh

Penyelesaian:

- $C(9, 4) = 126$ cara untuk membentuk perwakilan yang beranggotakn 5 orang sedemikian sehingga *A* selalu termasuk di dalamnya.
- $C(9, 5) = 126$ cara untuk membentuk perwakilan yang beranggotakn 5 orang sedemikian sehingga *A* tidak termasuk di dalamnya.
- $C(8, 4) = 70$ cara untuk membentuk perwakilan yang beranggotakan 5 orang sedemikian sehingga *A* termasuk di dalamnya, tetapi *B* tidak.

Contoh

- $C(8, 4) = 70$ cara untuk membentuk perwakilan yang beranggotakan 5 orang sedemikian sehingga *B* termasuk di dalamnya, tetapi *A* tidak.
- $C(8, 3) = 56$ cara untuk membentuk perwakilan yang beranggotakan 5 orang sedemikian sehingga *A* dan *B* selalu termasuk di dalamnya.

Contoh

- Jumlah cara membentuk perwakilan sedemikian sehingga setidaknya salah satu dari *A* atau *B* termasuk di dalamnya

  = jumlah cara membentuk perwakilan sehingga *A* termasuk di dalamnya, *B* tidak +

  jumlah cara membentuk perwakilan sehingga *B* termasuk di dalamnya, *A* tidak +

  jumlah cara membentuk perwakilan sehingga *A* dan *B* termasuk di dalamnya

  = 70 + 70 + 56 = 196

Contoh

Prinsip inklusi-eksklusi:

X = jumlah cara membentuk perwakilan yang menyertakan A

Y = jumlah cara membentuk perwakilan yang menyertakan B

$X \cap Y$ = jumlah cara membentuk perwakilan yang menyertakan A dan B, maka

$|X| = C(9, 4) = 126$; $|Y| = C(9, 4) = 126$;

$|X \cap Y| = C(8, 3) = 56$;

$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y| = 126 + 126 – 56 = 196$

Permutasi dan Kombinasi Bentuk Umum

Misalkan: ada n buah bola yang tidak seluruhnya berbeda warna (jadi, ada beberapa bola yang warnanya sama - *indistinguishable*).

n_1 bola diantaranya berwarna 1,

n_2 bola diantaranya berwarna 2,

n_k bola diantaranya berwarna k,

dan $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$.

Berapa jumlah cara pengaturan n buah bola ke dalam kotak-kotak tersebut (tiap kotak maks. 1 buah bola)?

Permutasi dan Kombinasi Bentuk Umum

Jika n buah bola itu kita anggap berbeda semuanya, maka jumlah cara pengaturan n buah bola ke dalam n buah kotak adalah

$P(n, n) = n!$.

Dari pengaturan n buah bola itu,

ada n_1! cara memasukkan bola berwarna 1

ada n_2! cara memasukkan bola berwarna 2

ada n_k! cara memasukkan bola berwarna k

Permutasi dan Kombinasi Bentuk Umum

- Permutasi n buah bola yang mana n_1 diantaranya berwarna 1, n_2 bola berwarna 2, …, n_k bola berwarna k adalah:

$$P(n; n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{P(n,n)}{n_1! n_2! \ldots n_k!} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}$$

Permutasi dan Kombinasi Bentuk Umum

Cara lain:

Ada $C(n, n_1)$ cara untuk menempatkan n_1 buah bola yang berwarna 1.

Ada $C(n - n_1, n_2)$ cara untuk menempatkan n_2 buah bola berwarna 2.

Ada $C(n - n_1 - n_2, n_3)$ cara untuk menempatkan $n3$ buah bola berwarna 3.

.

Ada $C(n - n_1 - n_2 - \ldots - n_k\text{-}1, n_k)$ cara untuk menempatkan n_k buah bola berwarna k.

Permutasi dan Kombinasi Bentuk Umum

- Jumlah cara pengaturan seluruh bola kedalam kotak adalah:
- $C(n; n1, n2, \ldots, nk) = C(n, n1)\, C(n - n1, n2)\, C(n - n1 - n2, n3) \ldots C(n - n1 - n2 - \ldots - nk\text{-}1, nk)$

$$= \frac{n!}{n_1! n_2! n_3! \ldots n_k}$$

Kesimpulan

$$P(n; n_1, n_2, \ldots, n_k) = C(n; n_1, n_2, \ldots, n_k)$$

$$= \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}$$

Contoh

Berapa banyak “kata” yang dapat dibentuk dengan menggunakan huruf-huruf dari kata *MISSISSIPPI*?

<u>Penyelesaian</u>:

$S = \{M, I, S, S, I, S, S, I, P , P , I\}$

huruf M = 1 buah ($n1$)   huruf I = 4 buah ($n2$)

huruf S = 4 buah ($n3$)   huruf P = 2 buah ($n4$)

n = 1 + 4 + 4 + 2 = 11 buah = | S |

Cara 1: Jumlah *string* = $P(11; 1, 4, 4, 2)$ = $\frac{11!}{(1!)(4!)(4!)(2!)} = 34650$

Cara 2: Jumlah *string* = $C(11, 1)C(10, 4)C(6, 4)C(2, 2)$

= $\frac{11!}{(1!)(10!)} \cdot \frac{10!}{(4!)(6!)} \cdot \frac{6!}{(4!)(2!)} \cdot \frac{2!}{(2!)(0!)}$ = 34650 buah

Contoh

Berapa banyak cara membagikan delapan buah mangga kepada 3 orang anak, bila Billy mendapat empat buah mangga, dan Andi serta Toni masing-masing memperoleh 2 buah mangga.

Penyelesaian:

$n = 8$, $n_1 = 4$, $n_2 = 2$, $n_3 = 2$, dan $n_1 + n_2 + n_3 = 4 + 2 + 2 = 8$

Jumlah cara membagi seluruh mangga =

$$\frac{8!}{(4!)(2!)(2!)} = 420$$ **cara**

Contoh

12 buah lampu berwarna (4 merah, 3 putih, dan 5 biru) dipasang pada 18 buah soket dalam sebuah baris (sisanya 6 buah soket dibiarkan kosong). Berapa jumlah cara pengaturan lampu?

<u>Penyelesaian</u>:

n = 18; n_1 = 4, n_2 = 3, n_3 = 5, dan n_4 = 6 (*socket* kosong)

Jumlah cara pengaturan lampu =

$$\frac{18!}{(4!)(3!)(5!)(6!)} \text{ cara}$$

Kombinasi Dengan Pengulangan

Misalkan terdapat *r* buah bola yang semua warnanya sama dan *n* buah kotak.

Masing-masing kotak hanya boleh diisi paling banyak satu buah bola.

Jumlah cara memasukkan bola: $C(n, r)$.

Masing-masing kotak boleh lebih dari satu buah bola (tidak ada pembatasan jumlah bola)

Jumlah cara memasukkan bola: $C(n + r - 1, r)$.

$\boldsymbol{C(n + r - 1, r) = C(n + r - 1, n - 1)}$.

Contoh

Pada persamaan $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$, x_i adalah bilangan bulat ≥ 0. Berapa jumlah kemungkinan solusinya?

Penyelesaian:

Analogi: 12 buah bola akan dimasukkan ke dalam 4 buah kotak (dalam hal ini, $n = 4$ dan $r = 12$).

Bagilah keduabelas bola itu ke dalam tiap kotak. Misalnya,

Kotak 1 diisi 3 buah bola ($x_1 = 3$)

Kotak 2 diisi 5 buah bola ($x_2 = 5$)

Kotak 3 diisi 2 buah bola ($x_3 = 2$)

Kotak 4 diisi 2 buah bola ($x_4 = 2$)

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 + 5 + 2 + 2 = 12$

Ada C(4 + 12 – 1, 12) = C(15, 12) = 455 buah solusi

Contoh

20 buah apel dan 15 buah jeruk dibagikan kepada 5 orang anak, tiap anak boleh mendapat lebih dari 1 buah apel atau jeruk, atau tidak sama sekali. Berapa jumlah cara pembagian yang dapat dilakukan?

Penyelesaian:

$n = 5$, $r_1 = 20$ (apel) dan $r_2 = 15$ (jeruk)

Membagi 20 apel kepada 5 anak: $C(5 + 20 - 1, 20)$ cara,

Membagi 15 jeruk kepada 5 anak: $C(5 + 15 - 1, 15)$ cara.

Jumlah cara pembagian kedua buah itu adalah

$= C(5 + 20 - 1, 20) \times C(5 + 15 - 1, 15)$

$= C(24, 20) \times C(19, 15)$

Koefisien Binomial

$(x + y)^0 = 1$
$(x + y)^1 = x + y$
$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
$(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$
$(x + y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$

$\boldsymbol{(x + y)^n = C(n, 0)\, x^n + C(n, 1)\, x^{n-1}\, y^1 + \ldots + C(n, k)\, x^{n-k}\, y^k + \ldots + C(n, n)\, y^n =}$

$$= \sum_{k=0}^{n} C(n,k)\, x^{n-k}\, y^k$$

Koefisien Binomial

Koefisien untuk $x^{n-k}y^k$ adalah $C(n, k)$. Bilangan $C(n, k)$ disebut **koefisien binomial**.

Contoh

Jabarkan $(3x - 2)^3$.

Penyelesaian:

Misalkan $a = 3x$ dan $b = -2$,

$(a + b)^3 = C(3, 0)\ a^3 + C(3, 1)\ a^2b^1 + C(3, 2)\ a^1b^2 +$
$C(3, 3)\ b^3$

$= 1\ (3x)^3 + 3\ (3x)^2\ (-2) + 3\ (3^x)\ (-2)^2 + 1\ (-2)^3$

$= 27\ x^3 – 54x^2 + 36x – 8$

Contoh

Tentukan suku keempat dari penjabaran perpangkatan (x - y)5.

Penyelesaian:

$(x - y)^5 = (x + (-y))^5$.

Suku keempat adalah: $C(5, 3)\ x^{5-3}\ (-y)^3 =$

$-10x^2y^3$.

- 1. Ada 5 orang mahasiswa jurusan Matematika dan 7 orang mahasiswa jurusan Informatika. Berapa banyak cara membentuk panitia yang terdiri dari 4 orang jika:
- (a) tidak ada batasan jurusan
- (b) semua anggota panitia harus dari jurusan Matematika
- (c) semua anggota panitia harus dari jurusan Informatika
- (d) semua anggota panitia harus dari jurusan yang sama
- (e) 2 orang mahasiswa per jurusan harus mewakili.

- 2. Kursi-kursi di sebuah bioskop disusun dalam baris-baris, satu baris berisi 10 buah kursi. Berapa banyak cara mendudukkan 6 orang penonton pada satu baris kursi:
- (a) jika bioskop dalam keadaan terang
- (b) jika bioskop dalam keadaan gelap

3. Berapa banyak cara membentuk sebuah panitia yang beranggotakan 5 orang yang dipilih dari 7 orang pria dan 5 orang wanita, jika di dalam panitia tersebut paling sedikit beranggotakan 2 orang wanita?