

## CONTOH MODEL TRANSPORTASI DAN PENYELESAIAN DENGAN NORTH WEST CORNER DAN MODI

Sebuah perusahaan saat ini beroperasi dengan 3 buah pabrik serta jumlah permintaan dari 3 Kota dengan kapasitas masing-masing sebagai berikut:

Pabrik	Produksi
A	90 ton
B	60 ton
C	50 ton
<b>Total</b>	<b>200 ton</b>

Kota	Permintaan
Solo	50 ton
Kudus	110 ton
Tegal	40 ton
<b>Total</b>	<b>200 ton</b>

Perkiraan biaya transportasi (dalam ribuan/ton) dari setiap pabrik ke masing-masing Kota adalah:

- Dari pabrik A ke kota Solo = 20
- Dari pabrik B ke kota Solo = 15
- Dari pabrik C ke kota Solo = 25
- Dari pabrik A ke kota Kudus = 5
- Dari pabrik B ke kota Kudus = 20
- Dari pabrik C ke kota Kudus = 10
- Dari pabrik A ke kota Tegal = 8
- Dari pabrik B ke kota Tegal = 10
- Dari pabrik C ke kota Tegal = 19

### Pertanyaan:

1. Bagaimana distribusi barang yang paling optimal guna memenuhi kebutuhan ketiga Kota tersebut?
2. Berapa total biaya optimal untuk distribusi barang dari pabrik ke Kota tujuan?

### Solusi

#### A. Menentukan Solusi Awal dengan NWC

- Prosedur:
  1. Alokasikan dengan kapasitas penuh pada sel kiri atas. Jika masih ada sisa kapasitas, alokasikan pada sel di bawahnya atau di kanannya sedemikian sehingga kapasitas baris atau kolom terpenuhi.
  2. Ulangi langkah 1 hingga seluruh kapasitas pada baris atau kolom terpenuhi.

- Catatan: Solusi awal matriks transportasi disebut **feasible** jika jumlah sel terisi adalah  $m+n-1$  dimana  $m$ =jumlah baris, dan  $n$ =jumlah kolom. Jika sel terisi kurang dari  $m+n-1$  maka perlu ditambahkan sel **dummy** dengan alokasi sebanyak 0 pada sel kosong yang memiliki ongkos terkecil.
- Solusi awal dengan NWC untuk masalah di atas:

TABEL 1

		Tujuan				Total	
		Solo	Kudus	Tegal			
Pabrik	A	50	20	40	5	8	90
	B		15	60	20	10	60
	C		25	10	40	19	50
Total		50	110	40			200

1. Cek kelayakan
  - Jumlah sel terisi = 5 (sel basis)
  - Jumlah Baris  $m=3$ ; Jumlah Kolom  $n=3$ ;
  - $m+n-1 = 3+3-1=5$ ;
  - Solusi awal tersebut feasible (layak) karena jumlah sel terisi =  $m+n-1$
2. Total cost (Tabel 1)
  - Total Cost =  $(50 \times 20) + (40 \times 5) + (60 \times 20) + (10 \times 10) + (40 \times 19) = 3260$

#### B. Menentukan Solusi Optimal dengan Modi

Optimalisasi dilakukan dengan langkah sebagai berikut:

1. Hitung nilai indeks baris dan kolom untuk semua sel terisi; Buat variabel indeks untuk setiap baris dan kolom, lalu susun persamaan:

$$u_i + v_j = c_{ij}$$

untuk setiap sel terisi, dimana  $c_{ij}$  = ongkos per unit pada baris ke  $i$  kolom ke  $j$ . Substitusikan  $u_1 = 0$  untuk memperoleh semua nilai  $u_i$  dan  $v_j$  dari sel terisi.

2. Hitung nilai indeks perubahan ongkos  $\hat{c}_{ij}$  (opportunity cost) dari semua sel kosong dengan rumus:

$$\hat{c}_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$$

3. Evaluasi nilai  $\hat{c}_{ij}$ 
  - Jika semua nilai  $\hat{c}_{ij}$  non-negatif maka tabel transportasi sudah optimal.

- o Jika masih terdapat  $\hat{c}_{ij}$  yang bertanda negatif, maka tabel transportasi belum optimal dan dilakukan perubahan/perputaran sel isi, dengan prosedur sebagai berikut:
  - Pilih sel kosong dengan  $\hat{c}_{ij}$  negatif terbesar sebagai entering variable (sel kosong yang akan dilakukan pengisian).
  - Buat loop dengan titik awal di sel kosong tersebut yang menghubungkan sel-sel terisi sebagai titik sudut loop. Tandai + dan - secara bergantian mulai dari sel kosong tersebut.
  - Pilih nilai sel terisi terkecil dari yang bertanda negatif (-) untuk dialokasikan ke sel kosong terpilih. Sesuaikan kapasitas baris dan kolom akibat perputaran sel isi tersebut.

4. Ulangi langkah 1 s.d. 3 hingga tabel optimal.

Tabel 1 dilakukan optimalisasi dengan metode MODI.

- Hitung indeks baris dan kolom dari sel terisi

		$v_1$	$v_2$	$v_3$	
		Solo	Kudus	Tegal	Total
$u_1$	A	20	5	8	90
$u_2$	B	15	20	10	60
$u_3$	C	25	10	19	50
	Total	50	110	40	200

Sel Terisi	Indeks	$u_1=0$
A1	$u_1+v_1=20$	$v_1=20$
A2	$u_1+v_2=5$	$v_2=5$
B2	$u_2+v_2=20$	$u_2=15$
C2	$u_3+v_2=10$	$u_3=5$
C3	$u_3+v_3=19$	$v_3=14$

- Hitung indeks perubahan ongkos dari sel kosong

Sel Kosong	Indeks Prbhn. Ongkos	$\hat{c}_{ij}$
A3	$\hat{c}_{13}=c_{13}-u_1-v_3$	$8-0-14=-6$
B1	$\hat{c}_{21}=c_{21}-u_2-v_1$	$15-15-20=-20$
B3	$\hat{c}_{23}=c_{23}-u_2-v_3$	$10-15-14=-19$
C1	$\hat{c}_{31}=c_{31}-u_3-v_1$	$25-5-20=0$

Tabel 1 belum optimal, karena masih ada  $\hat{c}_{ij}$  yang bernilai negatif. Sel kosong B1 terpilih sebagai entering variable dan akan diisi berdasarkan loop B1-A1-A2-B2 sebesar minimum(50,60) yaitu sebesar 50.

	Tujuan			Total
	Solo	Kudus	Tegal	
A	20	5	8	90
B	15	20	10	60
C	25	10	19	50
Total	50	110	40	200

Hasilnya adalah Tabel 2 berikut:

TABEL 2

	Tujuan			Total
	Solo	Kudus	Tegal	
A	20	5	8	90
B	15	20	10	60
C	25	10	19	50
Total	50	110	40	200

1. Cek kelayakan
  - o Jumlah sel terisi = 5 (sel basis)
  - o Jumlah Baris  $m=3$ ; Jumlah Kolom  $n=3$ ;
  - o  $m+n-1 = 3+3-1=5$ ;
  - o Solusi awal tersebut feasible (layak) karena jumlah sel terisi =  $m+n-1$
2. Total cost (Tabel 2)
  - o Total Cost =  $(90 \times 5) + (50 \times 15) + (10 \times 20) + (10 \times 10) + (40 \times 19) = 2260$
3. Cek optimalisasi Tabel 2
  - o Hitung indeks baris dan kolom sel terisi

Sel Terisi	Indeks	$u_1=0$
A2	$u_1+v_2=5$	$v_2=5$
B1	$u_2+v_1=15$	$v_1=0$
B2	$u_2+v_2=20$	$u_2=15$
C2	$u_3+v_2=10$	$u_3=5$
C3	$u_3+v_3=19$	$v_3=14$

- o Hitung indeks perubahan ongkos sel kosong

Sel Kosong	Indeks Prbhn. Ongkos	$\hat{c}_{ij}$
A1	$\hat{c}_{11}=c_{11}-u_1-v_1$	20-0-0=+20
A3	$\hat{c}_{13}=c_{13}-u_1-v_3$	8-0-14=-6
B3	$\hat{c}_{23}=c_{23}-u_2-v_3$	10-15-14=-19
C1	$\hat{c}_{31}=c_{31}-u_3-v_1$	25-5-0=+20

Tabel 2 belum optimal, karena masih ada  $\hat{c}_{ij}$  yang bernilai negatif. Sel kosong B3 terpilih sebagai entering variable dan akan diisi berdasarkan loop B3-B2-C2-C3 sebesar minimum(10,40) yaitu sebesar 10.

	Tujuan			Total
	Solo	Kudus	Tegal	
A	20	5	8	90
B	15	20	10	60
C	25	10	19	50
Total	50	110	40	200

Hasilnya adalah Tabel 3 berikut:

TABEL 3

	Tujuan			Total
	Solo	Kudus	Tegal	
A	20	5	8	90
B	15	20	10	60
C	25	10	19	50
Total	50	110	40	200

1. Cek kelayakan Tabel 3
  - Jumlah sel terisi = 5 (sel basis)
  - Jumlah Baris  $m=3$ ; Jumlah Kolom  $n=3$ ;
  - $m+n-1 = 3+3-1=5$ ;
  - Tabel 3 feasible (layak) karena jumlah sel terisi =  $m+n-1$
2. Total cost (Tabel 3)
  - o Total Cost =  $(90 \times 5) + (50 \times 15) + (10 \times 10) + (20 \times 10) + (30 \times 19) = 2070$

3. Cek optimalisasi Tabel 3

- o Hitung indeks baris dan kolom sel terisi

Sel Terisi	Indeks	$u_1=0$
A2	$u_1+v_2=5$	$v_2=5$
B1	$u_2+v_1=15$	$v_1=19$
B3	$u_2+v_3=10$	$u_2=-4$
C2	$u_3+v_2=10$	$u_3=5$
C3	$u_3+v_3=19$	$v_3=14$

- o Hitung indeks perubahan ongkos sel kosong

Sel Kosong	Indeks Prbhn. Ongkos	$\hat{c}_{ij}$
A1	$\hat{c}_{11}=c_{11}-u_1-v_1$	20-0-19=+1
A3	$\hat{c}_{13}=c_{13}-u_1-v_3$	8-0-14=-6
B2	$\hat{c}_{22}=c_{22}-u_2-v_2$	20-(-4)-19=+5
C1	$\hat{c}_{31}=c_{31}-u_3-v_1$	25-5-19=+1

Tabel 3 belum optimal, karena masih ada  $\hat{c}_{ij}$  yang bernilai negatif. Sel kosong A3 terpilih sebagai entering variable dan akan diisi berdasarkan loop A3-A2-C2-C3 sebesar minimum(90,30) yaitu sebesar 30.

	Tujuan			Total
	Solo	Kudus	Tegal	
A	20	5	8	90
B	15	20	10	60
C	25	10	19	50
Total	50	110	40	200

Hasilnya adalah Tabel 4 berikut:

TABEL 4

	Tujuan			Total
	Solo	Kudus	Tegal	
A	20	5	8	90
B	15	20	10	60
C	25	10	19	50
Total	50	110	40	200

1. Cek kelayakan Tabel 4
  - Jumlah sel terisi = 5 (sel basis)
  - Jumlah Baris  $m=3$ ; Jumlah Kolom  $n=3$ ;
  - $m+n-1 = 3+3-1=5$ ;
  - Tabel 4 feasible (layak) karena jumlah sel terisi =  $m+n-1$
2. Total cost (Tabel 4)
  - Total cost =  $(60 \times 5) + (30 \times 8) + (50 \times 15) + (10 \times 10) + (50 \times 10) = 1890$
3. Cek optimalisasi Tabel 4
  - Hitung indeks baris dan kolom sel terisi

Sel Terisi	Indeks	$u1=0$
A2	$u1+v2=5$	$v2=5$
A3	$u1+v3=8$	$v3=8$
B1	$u2+v1=15$	$v1=13$
B3	$u2+v3=10$	$u2=2$
C2	$u3+v2=10$	$u3=3$

- Hitung indeks perubahan ongkos sel kosong

Sel Kosong	Indeks Prbhn. Ongkos	$\hat{c}_{ij}$
A1	$\hat{c}_{11}=c_{11}-u_1-v_1$	$20-0-13=+7$
B2	$\hat{c}_{22}=c_{22}-u_2-v_2$	$20-2-5=+13$
C1	$\hat{c}_{31}=c_{31}-u_3-v_1$	$25-3-13=+9$
C3	$\hat{c}_{33}=c_{33}-u_3-v_3$	$19-3-8=+8$

Tabel 4 sudah optimal, karena tidak ada  $\hat{c}_{ij}$  yang bernilai negatif dengan total cost sebesar 1890.

### CONTOH MODEL TRANSPORTASI DAN PENYELESAIAN DENGAN INSPEKSI (ONGKOS TERKECIL/LEAST COST) DAN MODI

#### Contoh:

Lihat kembali persoalan di atas. Jika matriks solusi awal menggunakan metode inspeksi (ongkos terkecil) dan penyelesaian optimalnya menggunakan stepping stone, dapat dilakukan sebagai berikut:

#### A. Menentukan Solusi Awal dengan Inspeksi

- Prosedur:
  1. Alokasikan dengan kapasitas penuh pada sel yang memiliki ongkos terkecil. Jika terdapat

lebih dari 1 sel dengan ongkos terkecil, pilih salah satu.

2. Ulangi langkah 1 hingga seluruh kapasitas pada baris atau kolom terpenuhi.

- Catatan: Solusi awal matriks transportasi disebut **feasible** jika jumlah sel terisi adalah  $m+n-1$  dimana  $m$ =jumlah baris, dan  $n$ =jumlah kolom. Jika sel terisi kurang dari  $m+n-1$  maka perlu ditambahkan sel **dummy** dengan alokasi sebanyak 0 pada sel yang kosong.
- Solusi awal dengan metode inspeksi untuk masalah di atas:

1. Ongkos terkecil terdapat pada sel B2, isikan dengan kapasitas penuh sebesar 90. Akibatnya, kapasitas baris A sudah terpenuhi.
2. Ongkos terkecil berikutnya yang layak terdapat pada sel B3, isikan dengan kapasitas penuh sebesar 40. Akibatnya kapasitas kolom Tegal sudah terpenuhi.
3. Ongkos terkecil berikutnya yang layak terdapat pada sel C2, isikan dengan kapasitas penuh sebesar 20 (karena hanya tersisa 20 untuk kolom C. Akibatnya kapasitas kolom C sudah terpenuhi.
4. Ongkos terkecil berikutnya yang layak terdapat pada sel B1, isikan dengan kapasitas penuh sebesar 20 (karena hanya tersisa 20 untuk baris B). Akibatnya kapasitas baris B sudah terpenuhi.
5. Ongkos terkecil berikutnya yang layak terdapat pada sel C1, isikan sisa kapasitas yang masih mungkin (sebesar 30).
6. Hasil alokasi dinyatakan pada Tabel 1:

TABEL 1

		Tujuan			
		Solo	Kudus	Tegal	Total
Pabrik	A	20	5	8	90
	B	15	20	10	60
	C	25	10	19	50
Total		50	110	40	200

- Cek kelayakan (Tabel 1)
  - Jumlah sel terisi = 5 (sel basis)
  - Jumlah Baris  $m=3$ ; Jumlah Kolom  $n=3$ ;
  - $m+n-1 = 3+3-1=5$ ;
  - Solusi awal tersebut feasible (layak) karena jumlah sel terisi =  $m+n-1$
- Total cost (Tabel 1)
  - Total Cost =  $(90 \times 5) + (20 \times 15) + (40 \times 10) + (30 \times 25) + (20 \times 10) = 2100$

### B. Menentukan Solusi Optimal dengan MoDi

Lihat prosedur menggunakan metode MoDi pada contoh sebelumnya.

- Hitung indeks baris dan kolom dari sel terisi

		$v_1$	$v_2$	$v_3$	
		Solo	Kudus	Tegal	Total
$u_1$	A	20	5	8	90
$u_2$	B	15	20	10	60
$u_3$	C	25	10	19	50
	Total	50	110	40	200

Sel Terisi	Indeks	$u_1=0$
A2	$u_1+v_2=5$	$v_2=5$
B1	$u_2+v_1=15$	$u_2=-5$
B3	$u_2+v_3=10$	$v_3=15$
C1	$u_3+v_1=25$	$v_1=20$
C2	$u_3+v_2=10$	$u_3=5$

- Hitung indeks perubahan ongkos dari sel kosong

Sel Kosong	Indeks Prbhn. Ongkos	$\hat{c}_{ij}$
A1	$\hat{c}_{11}=c_{11}-u_1-v_1$	$20-0-20=0$
A3	$\hat{c}_{13}=c_{13}-u_1-v_3$	$8-0-15=-7$
B2	$\hat{c}_{22}=c_{22}-u_2-v_2$	$20-(-5)-5=+20$
C3	$\hat{c}_{33}=c_{33}-u_3-v_3$	$19-5-15=-1$

Tabel 1 belum optimal, karena masih ada  $\hat{c}_{ij}$  yang bernilai negatif. Sel kosong A3 terpilih sebagai entering variable dan akan diisi berdasarkan loop A3-B3-B1-C1-C2-A2 sebesar minimum(40,30,90) yaitu sebesar 90, sebagai berikut:

	Tujuan			Total
	Solo	Kudus	Tegal	
A	20	5	8	90
B	15	20	10	60
C	25	10	19	50
Total	50	110	40	200

Hasilnya adalah Tabel 2 berikut:

TABEL 2

	Tujuan			Total
	Solo	Kudus	Tegal	
A	20	5	8	90
B	15	20	10	60
C	25	10	19	50
Total	50	110	40	200

- Cek kelayakan (Tabel 2)
  - Jumlah sel terisi = 5 (sel basis)
  - Solusi awal tersebut feasible (layak) karena jumlah sel terisi =  $m+n-1$
- Total cost (Tabel 2)
  - Total Cost =  $(60 \times 5) + (30 \times 8) + (50 \times 15) + (10 \times 10) + (50 \times 10) = 1890$
- Cek optimalisasi Tabel 2
  - Hitung indeks baris dan kolom sel terisi

Sel Terisi	Indeks	$u_1=0$
A2	$u_1+v_2=5$	$v_2=5$
A3	$u_1+v_3=8$	$v_3=8$
B1	$u_2+v_1=15$	$v_1=13$
B3	$u_2+v_3=10$	$u_2=2$
C2	$u_3+v_2=10$	$u_3=3$

- Hitung indeks perubahan ongkos sel kosong

Sel Kosong	Indeks Prbhn. Ongkos	$\hat{c}_{ij}$
A1	$\hat{c}_{11}=c_{11}-u_1-v_1$	$20-0-13=+7$
B2	$\hat{c}_{22}=c_{22}-u_2-v_2$	$20-2-5=+13$
C1	$\hat{c}_{31}=c_{31}-u_3-v_1$	$25-3-13=+9$
C3	$\hat{c}_{33}=c_{33}-u_3-v_3$	$19-3-8=+8$

Tabel 2 sudah optimal, karena tidak ada  $\hat{c}_{ij}$  yang bernilai negatif dengan total cost sebesar 1890.

## CONTOH MODEL TRANSPORTASI DAN PENYELESAIAN DENGAN VAM (VOGEL APPROXIMATION METHOD) DAN MODI

### Contoh:

Lihat kembali persoalan di atas. Jika matriks solusi awal menggunakan metode VAM dan penyelesaian optimalnya menggunakan stepping stone, dapat dilakukan sebagai berikut:

#### A. Menentukan Solusi Awal dengan VAM

- Prosedur:
  1. Hitung nilai pinalti (selisih 2 ongkos terkecil) pada semua baris dan kolom.
  2. Pilih nilai pinalti kolom/baris terbesar.
  3. Alokasikan dengan kapasitas penuh pada sel dengan ongkos terkecil dari kolom/baris pinalti terbesar/terpilih.
  4. Ulangi langkah 1 s.d. 3 hingga semua kapasitas baris/kolom terpenuhi.
- Catatan: Solusi awal matriks transportasi disebut **feasible** jika jumlah sel terisi adalah  $m+n-1$  dimana  $m$ =jumlah baris, dan  $n$ =jumlah kolom. Jika sel terisi kurang dari  $m+n-1$  maka perlu ditambahkan sel **dummy** dengan alokasi sebanyak 0 pada sel yang kosong.
- Solusi awal dengan metode VAM untuk masalah di atas:

TABEL 1

	Tujuan			Kap	Pinalti				
	Solo	Kudus	Tegal		1	2	3	4	5
A	20	5	8	90	3	3	12	-	-
B	15	20	10	60	5	5	5	5	10
C	25	10	19	50	9	-	-	-	-
Kap	50	110	40						
Pinalti									
1	5	5	2						
2	5	15	2						
3	5	-	2						
4	15	-	10						
5	-	-	10						

1. Cek kelayakan (Tabel 1)
  - Jumlah sel terisi = 5 (sel basis)
  - Solusi awal tersebut feasible (layak) karena jumlah sel terisi =  $m+n-1$
2. Total cost (Tabel 2)
  - Total Cost =  $(60 \times 5) + (30 \times 8) + (50 \times 15) + (10 \times 10) + (50 \times 10) = 1890$

3. Cek optimalisasi Tabel 1

- o Hitung indeks baris dan kolom sel terisi

Sel Terisi	Indeks	$u_1=0$
A2	$u_1+v_2=5$	$v_2=5$
A3	$u_1+v_3=8$	$v_3=8$
B1	$u_2+v_1=15$	$v_1=13$
B3	$u_2+v_3=10$	$u_2=2$
C2	$u_3+v_2=10$	$u_3=3$

- o Hitung indeks perubahan ongkos sel kosong

Sel Kosong	Indeks Prbhn. Ongkos	$\hat{c}_{ij}$
A1	$\hat{c}_{11}=c_{11}-u_1-v_1$	$20-0-13=+7$
B2	$\hat{c}_{22}=c_{22}-u_2-v_2$	$20-2-5=+13$
C1	$\hat{c}_{31}=c_{31}-u_3-v_1$	$25-3-13=+9$
C3	$\hat{c}_{33}=c_{33}-u_3-v_3$	$19-3-8=+8$

Tabel 1 sudah optimal, karena tidak ada  $\hat{c}_{ij}$  yang bernilai negatif dengan total cost sebesar 1890.

**Catatan:**

Dari contoh tersebut di atas, tampak bahwa penggunaan metode VAM merupakan pendekatan terbaik dalam menentukan solusi awal permasalahan transportasi karena lebih cepat dalam mencapai solusi optimal.

24/11/2014 by Aris Marjuni