IMPLEMENTASI METODE DEKOMPOSISI LU PADA REGRESI LINIER BERGANDA

Yuniarsi Rahayu

Fakultas Ilmu Komputer Universitas Dian Nuswantoro- Semarang 50131
Email : yuniarsi_r@dosen.dinus.ac.id

ABSTRAK

Banyak persoalan yang melibatkan model matematika. Persoalan yang muncul di lapangan diformulasikan ke dalam model yang berbentuk persamaan matematika. Metode Numerik merupakan alat bantu pemecahan masalah matematika yang rumit yang seringkali tidak mungkin dipecahkan secara analitik. Dalam makalah ini akan dihahas persoalan regresi linier ganda. Koefisien-koefisiuen regresi ganda dihitung dengan menformulasikan menjadi persamaan linier. Persamaan linier yang terbentuk dalamm studi kasus ini adalah persamaan dengan 4 variabel. Solusi penyelesaiannya dengan menggunakan metode Dekomposisi LU, yang merupakan metode pemfaktoran suatu matriks A=LU menjadi matriks segitiga bawah L (Lower) dan matriks segitiga atas U (Upper). Pemfaktoran A atas L dan U menggunakan metode LU Gauss. Dalam proses perhitungan variabe-variabel yang terbentuk menggunakan bantuan Matlab.

Kata Kunci : Matriks, Metode Numerik, Dekomposisi LU

1. Pendahuluan

Kebanyakan permasalahan didalam bidang fisika, kimia, ekonomi atau persoalan rekayasa (enginnering) dan matematika dapat dimodelkan menjadi persamaan-persamaan linier. Model matematika yang rumit tidak dapat diselesaikan dengan metode analitik yang sudah umum untuk mendapatkan solusi sejati (exact solution). Metode analitik merupakan metode penyelesaian model matematika dengan menggunakan rumus-rumus aljabar yang sudah baku. Penyelesaian persamaan linier dalam metode numerik dapat diselesaikan dengan menggunakan berbagai macam metode.

Dalam tulisan ini, dijelaskan suatu contoh kasus regresi linier ganda yaitu 1 perubah terikat Y dan 3 perubah bebas X_{1i} dan X_{2i} , X_{3i} dengan menggunakan 15 responden. Data disajikan dalam bentuk tabel diolah untuk mendapatkan persamaan linier dengan 4 perubah yang dinotasikan dengan a_0, a_1, a_2 dan a_3. Untuk mendapatkan hasil penyelesaiannya, maka dibentuklah persamaan matriksnya. Persamaan linier dalam metode numerik yang terbentuk diselesaikan dengan menggunakan metode dekomposisi LU dengan 4 perubah. Dekomposisi LU merupakan metode pemfaktoran suatu matriks A menjadi matriks segitiga bawah L (Lower) dan matriks segitiga atas U (Upper). Sedangkan metode yang digunakan untuk pemfaktoran menggunakan metode LU Gauss.

Dalam proses perhitungan untuk mendapatkan koefisien-koefisien pada persamaan regresi linier ganda digunakan alat bantu Matlab. Matlab merupakan sebuah bahasa high-peformance untuk komputasi teknis. Sebuah program untuk analisis dan komputasi numerik dan merupakan pemrograman matematika lanjutan yang dibentuk dengan dasar pemikiran menggunakan sifat dan bentuk matriks. MATLAB singkatan dari Matrix Laboratory. Matlab mengintegrasikan perhitungan, visualisasi, dan pemrograman dalam suatu lingkungan yang mudah digunakan di mana permasalahan dan solusi dinyatakan dalan notasi secara matematis yang dikenal umum. Matlab dapat digunakan sebagai kalkulator ilmiah yang memungkinkan akses terhadap kemampuan aljabar komputer. Sebuah kalkulator yang dapat diprogram, dapat membuat, mengeksekusi dan menyimpan urutan perintah sehingga memungkinkan komputasi dilakukan secara otomatis.

2. Pembahasan

2.1 Regresi Linier Berganda

Analisis regresi linier berganda merupakan pengembangan dari analisis regresi linier sederhana. Kegunaannya yaitu untuk meramalkan nilai variabel terikat (Y) apabila variabel bebasnya (X) dua atau lebih. Analisis regresi linier berganda adalah alat untuk meramalkan nilai pengaruh dua variabel bebas atau lebih terhadap satu variabel terikat (untuk membuktikan ada tidaknya hubungan fungsional atau hubungan kausal antara dua atau lebih variabel bebas X_1, X_2, …., X_i terhadap suatu variabel terikat Y. Variabel pertama disebut juga sebagai variabel tergantung dan variabel kedua disebut juga sebagai variabel bebas. Jika variabel bebas lebih dari satu, maka analisis regresi disebut regresi linear berganda. Disebut berganda karena pengaruh beberapa variabel bebas akan dikenakan kepada variabel tergantung.

Untuk regresi linier berganda dengan tiga variabel bebas :

$$\hat{Y} = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 \qquad (1)$$

Penyelesaian empat persamaan dengan empat anu yang berbentuk :

$$\begin{aligned}
\sum Y_i &= a_0 n + a_1 \sum X_{1i} + a_2 \sum X_{2i} + a_3 \sum X_{3i} && (2)\\
\sum Y_i X_{1i} &= a_0 \sum X_{1i} + a_1 \sum X^2_{1i} + a_2 \sum X_{1i} X_{2i} + a_3 \sum X_{1i} X_{3i} && (3)\\
\sum Y_i X_{2i} &= a_0 \sum X_{2i} + a_1 \sum X_{1i} X_{2i} + a_2 \sum X^2_{2i} + a_3 \sum X_{2i} X_{3i} && (4)\\
\sum Y_i X_{3i} &= a_0 \sum X_{3i} + a_1 \sum X_{1i} X_{3i} + a_2 \sum X_{2i} X_{3i} + a_3 \sum X^2_{3i} && (5)
\end{aligned}$$

2.2 Persamaan Linier

Dipandang m buah persamaan-persamaan linier dengan n anu :

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2\\
&\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m
\end{aligned}$$

a_i dan b adalah skalar, di mana a_i disebut koefisien dan b disebut konstanta dari persamaan.
x_i : $x_1, x_2, \ldots, x_n$ disebut anu (undeterminants, unknows atau variables)

Dengan perkalian matriks, persamaan-persamaan tersebut bisa ditulis sebagai berikut :

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} a11 & a12 & \ldots & a1n \\ a21 & a22 & \ldots.. & a2n \\ \ldots.. & \ldots.. & \ldots.. & \ldots.. \\ \ldots.. & \ldots.. & \ldots.. & \ldots.. \\ am1 & am2 & \ldots.. & amn \end{pmatrix}} \underset{X}{\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ \ldots \\ \ldots \\ xn \end{pmatrix}} \underset{=}{=} \underset{B}{\begin{pmatrix} b1 \\ b2 \\ \ldots \\ \ldots \\ bm \end{pmatrix}} \qquad (6)$$

2.3 Metode Dekomposisi LU

Diketahui suatu persamaan : Ax = b
Jika matriks A non singular maka matriks tersebut dapat difaktorkan atau didekomposisikan menjadi matriks segitiga bawah L (lower) dan matriks segitiga atas (upper) yaitu :

A = L U ……… (7)

Pemfaktorannya sebagai berikut :

$$\begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 & \ldots & a1n \\ a21 & a22 & a23 & \ldots & a2n \\ a31 & a32 & a33 & \ldots & a3n \\ . & . & . & \ldots & . \\ . & . & . & \ldots & . \\ an1 & an2 & an3 & \ldots & ann \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ l21 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ l31 & l32 & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & . & \ldots & . \\ . & . & . & \ldots & . \\ ln1 & ln2 & ln3 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u11 & u12 & u13 & \ldots & u1n \\ 0 & u22 & u23 & \ldots & u2n \\ 0 & 0 & u33 & \ldots & u3n \\ . & . & . & \ldots & . \\ . & . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & unn \end{pmatrix}$$

Dari rumus (7) menjadi :

ISBN 979 - 26 - 0255 - 0

$Ax = b$

$LUx = b$

Jika $Ux = y$ maka $Ly = b$

Dengan menggunakan teknik penyulihann maju (*forward substitution)* sehingga diperoleh y_1, y_2, ….. y_n yaitu sebagai berikut :

$$Ly = b \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ l21 & 1 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ ln1 & ln2 & ln3 & ... & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y1 \\ y2 \\ ... \\ yn \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b1 \\ b2 \\ ... \\ bn \end{pmatrix}$$

Untuk menentukan x_1, x_2,…x_n digunakan teknik penyulihan mundur (*backward substitution*) sebagai berikut :

$$Ux = y \rightarrow \begin{pmatrix} u11 & u12 & u13 & ... & u1n \\ 0 & u22 & u23 & ... & u2n \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & unn \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ ... \\ xn \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y1 \\ y2 \\ ... \\ yn \end{pmatrix}$$

2.4 Pemfaktoran dengan Metode LU Gauss

Misalnya matriks A berukuran 4x4 difaktorkan atas L dan U,

$$\begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 & a14 \\ a21 & a22 & a23 & a24 \\ a31 & a32 & a33 & a34 \\ a41 & a42 & a43 & a44 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ m21 & 1 & 0 & 0 \\ m31 & m32 & 1 & 0 \\ m41 & m42 & m43 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u11 & u12 & u13 & u14 \\ 0 & u22 & u23 & u24 \\ 0 & 0 & u33 & u34 \\ 0 & 0 & 0 & u44 \end{pmatrix}$$

A = L U

Langkah-langkah pembentukkannya adalah sebagai berikut :

1. Menyatakan A sebagai A = IA

$$\begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 & ... & a1n \\ a21 & a22 & a23 & ... & a2n \\ a31 & a32 & a33 & ... & a3n \\ . & . & . & ... & . \\ . & . & . & ... & . \\ an1 & an2 & an3 & ... & ann \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ . & . & . & ... & . \\ . & . & . & ... & . \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 & ... & a1n \\ a21 & a22 & a23 & ... & a2n \\ a31 & a32 & u33 & ... & u3n \\ . & . & . & ... & . \\ . & . & . & ... & . \\ an1 & an2 & an3 & ... & ann \end{pmatrix}$$

2. Mengeliminasikan matriks A di ruas kanan menjadi matriks segitiga atas U. Menempatkan faktor pengali m_{ij} pada posisi l_{ij} di matriks I.
3. Setelah seluruh proses eliminasi Gauss selesai, matriks I menjadi matriks L, dan matriks A di ruas kanan menjadi matriks U.

Sebagai contoh, misal suatu matriks A yaitu

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Pemfaktorann matriks dengan metode LU Gauss adalah :

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -4 & 6 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Kemudian mengeliminasikan matriks A di ruas kanan menjadi matriks segitiga atas U, dan menempelkan faktor pengali m_{ij} pada posisi l_{ij} di matriks I. Sehingga diperoleh sebagai berikut :

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -4 & 6 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ -2 & 1.6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2.5 & 3.5 \\ 0 & 0 & -0.6 \end{pmatrix}$$

2.5 Studi Kasus Regresi Linier Ganda

Misal seorang peneliti ingin menyediakan data sebanyak 15 responden dengan variabel yang tersedia adalah X_{1i}, X_{2i}, X_{3i} dan Y_i. Hasil penyajian datanya terdapat di tabel 1 sebagai berikut:

Tabel 1 : Data yang Belum Diolah

NO	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Y_i	45	56	47	52	45	49	51	48	46	49	54	48	52	51	50
X_{1i}	27	24	26	29	28	27	26	28	27	23	29	30	26	32	27
X_{2i}	13	16	20	15	18	15	21	19	16	22	23	16	17	16	18
X_{3i}	11	12	9	12	14	13	13	14	12	10	11	13	11	12	12

Berdasar data pada tabel 1 , sehingga diperoleh data seperti ditunjukkan pada tabel 2 sebagai berikut :

Tabel 2 : Penyajian Data yang Diolah

No	Y	X_{1i}	X_{2i}	X_{3i}	Y_iX_{1i}	Y_iX_{2i}	$Y_i X_{3i}$	$X_{1i}X_{2i}$	$X_{1i}X_{3i}$	$X_{2i}X_{3i}$	X^2_{1i}	X^2_{2i}	X^2_{3i}
1	45	27	13	11	1215	585	495	351	297	143	729	169	121
2	56	24	16	12	1344	896	672	384	288	192	576	256	144
3	47	26	20	9	1222	940	423	520	234	180	676	400	81
4	52	29	15	12	1508	780	624	435	348	180	841	225	144
5	45	28	18	14	1260	810	630	504	392	252	784	324	196
6	49	27	15	13	1323	735	637	405	351	195	729	225	169
7	51	26	21	13	1326	1071	663	546	338	273	676	441	169
8	48	28	19	14	1344	912	672	532	392	266	784	361	196
9	46	27	16	12	1242	736	552	432	324	192	729	256	144
10	49	23	22	10	1127	1078	490	506	230	220	529	484	100
11	54	29	23	11	1566	1242	594	667	319	253	841	529	121

 ISBN 979 - 26 - 0255 - 0

12	48	30	16	13	1440	768	624	480	390	208	900	256	169
13	52	26	17	11	1352	884	572	442	286	187	676	289	121
14	51	32	16	12	1632	816	612	512	384	192	1024	256	144
15	50	27	18	12	1350	900	600	486	324	216	729	324	144
∑	**743**	**409**	**265**	**179**	**20251**	**13153**	**8860**	**7202**	**4897**	**3149**	**11223**	**4795**	**2163**

Dari tabel 2, kemudian diformulasikan menjadi model matematika dalam bentuk persamaan linier (2), (3), (4) dan (5) sebagai berikut :

$$\left.\begin{aligned} 15\,a0 + 409\,a1 + 265\,a2 + 179\,a3 &= 743 \\ 409\,a0 + 11223\,a1 + 7202\,a2 + 4897\,a3 &= 20251 \\ 265\,a0 + 7202\,a1 + 4795\,a2 + 3149\,a3 &= 13153 \\ 179\,a0 + 4897\,a1 + 3149\,a2 + 2163\,a3 &= 8860 \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Persamaan (6) dibentuk menjadi persamaan matriks sebagai berikut :

$$\begin{pmatrix} 15 & 409 & 265 & 179 \\ 409 & 11223 & 7202 & 4897 \\ 265 & 7202 & 4795 & 3149 \\ 179 & 4897 & 3149 & 2163 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a0 \\ a1 \\ a2 \\ a3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 743 \\ 20251 \\ 13153 \\ 8860 \end{pmatrix}$$

Persamaan (6) yang telah dibentuk menjadi persamaan matriks kemudian diselesaikan menggunakan metode dekomposisi LU seperti yang terlihat pada gambar 1 sebagai berikut :

```
clc
clear all
A=[15 409 265 179;409 11223 7202 4897;265 7202 4795 3149;179 4897 3149 2163]
m21=A(2,1)/A(1,1)
A(2,:)=A(2,:)-A(1,:)*m21
m31=A(3,1)/A(1,1)
A(3,:)=A(3,:)-A(1,:)*m31
m41=A(4,1)/A(1,1)
A(4,:)=A(4,:)-A(1,:)*m41
m32=A(3,2)/A(2,2)
A(3,:)=A(3,:)-A(2,:)*m32
m42=A(4,2)/A(2,2)
A(4,:)=A(4,:)-A(2,:)*m42
m43=A(4,3)/A(3,3)
A(4,:)=A(4,:)-A(3,:)*m43
U=[A(1,1) A(1,2) A(1,3) A(1,4);A(2,1) A(2,2) A(2,3) A(2,4);A(3,1) A(3,2) A(3,3) A(3,4);A(4,1) A(4,2) A(4,3) A(4,4)]
L=[1 0 0 0;m21 1 0 0;m31 m32 1 0;m41 m42 m43 1]
B=[743;20251;13153;8860]
Y1=B(1,1)
Y2=B(2,1)-L(2,1)*Y1
Y3=B(3,1)-L(3,1)*Y1-L(3,2)*Y2
Y4=B(4,1)-L(4,1)*Y1-L(4,2)*Y2-L(4,3)*Y3
Y=[Y1;Y2;Y3;Y4]
a3=Y4/U(4,4)
a2=(Y3-U(3,4)*a3)/U(3,3)
a1=(Y2-U(2,3)*a2-U(2,4)*a3)/U(2,2)
a0=(Y1-U(1,2)*a1-U(1,3)*a2-U(1,4)*a3)/U(1,1)
```

Gambar 1 : Proses Perhitungan Metode Dekomposisi LU

Terlihat gambar 1, langkah awal baris 1 command clc unntuk membersihkan layar, baris 2 untuk menghapus semua variable. Baris 4, 6, 8, 10, 12, dan 14 merupakan proses menentukan faktor pengali yaitu m_{21}, m_{31}, m_{41}, m_{32}, m_{42} dan m_{43}. Baris 5, 7, 9, 11, 13 dan 15 merupakan proses perhitungan menjadi matriks segitiga atas. Baris 16: menentukan matriks U. Baris 17 : menentukan matriks L. Baris 18 : matriks kanan persamaan. Baris 19, 20, 21, dan 22 : proses perhitungan matriks Y. Baris 23 : menentukan matriks Y. Baris 24, 25,26,dan 27 : menentukan koefisien-koefisien dari regresi linier ganda yaitu a_0, a_1, a_2 dan a_3.

Jika gambar 1 dijalankan, maka dapat diperoleh hasil untuk a_3 =-0.1241 ; a_2 =0.2179; a_1 = -0.0135; a_0 = 47.5334 sehingga persamaan regresinya gandanya (1) adalah sebagai berikut :

$\hat{Y} = 47.5334 - 0.0135\ X_1 + 0.2179\ X_2 - 0.1241\ X_3$.

Untuk perhitungan kesalahan baku regresi sebagai berikut :

$$S_e^{\ 2} = \frac{e'e}{n-k}\ ,\ e'e = \sum e^2_{\ i}$$

n = banyaknys observasi
k = banyaknya variable

$$S^2_{\ e} = \frac{137.0110613}{11} = 12.45555103$$

Kesalahan baku (standart error) regresi sama dengan simpangan baku (standart deviasi) dari kesalahan baku (disturbance error) dengan symbol :

$$Se = \sqrt{S_e^2} = \sqrt{\frac{e'e}{n-k}} = \sqrt{(\frac{1}{n-k}\sum e^2{}_i)}$$

Se mengukur variasi Y terhadap garis regresi $\hat{Y}$ sebab e = Y – $\hat{Y}$,sehingga Se = 3.529242274

```
Command Window
>>
A =

        15         409         265         179
       409       11223        7202        4897
       265        7202        4795        3149
       179        4897        3149        2163

invers matriks A adalah
ans =

   19.9554   -0.3996   -0.2793   -0.3400
   -0.3996    0.0170    0.0025   -0.0090
   -0.2793    0.0025    0.0097    0.0033
   -0.3400   -0.0090    0.0033    0.0442

kesalahan baku perkiraan ao yaitu Sao adalah 15.7656
kesalahan baku perkiraan al yaitu Sal adalah  0.4602
kesalahan baku perkiraan a2 yaitu Sa2 adalah  0.3482
kesalahan baku perkiraan a3  yaitu Sa3 adalah  0.7422
>>
```

Gambar 2. Kesalahan baku perkiraan a_0, a_1, a_2, dan a_3

Dari persamaan regresi ganda $\hat{Y} = 47.5334 - 0.0135\ X_1 + 0.2179\ X_2 - 0.1241\ X_3$, a_j artinya kalau semua variable bebas konstan (tetap) maka kenaikan X_j sebesar 1 unit menyebabkan kenaikkan Y sebesar a_j kali. Gambar 2 memperlihatkan hasil perhitungan kesalahan baku (standart error) perkiraan dari a_0, = 15.7656, a_1= 0.4602, a_2 = 0.3482, dan a_3 = 0.7422.

ISBN 979 - 26 - 0255 - 0

3. Kesimpulan

Berdasarkan dari pembahasan dan analisis data yang sudah diuraikan, maka dapat disimpulkan sebagai berikut :

a) Permasalahan yang dibahas ini, adalah suatu kasus untuk 15 responden dengan satu perubah terikat (Y) dan tiga perubah X_{1i}, X_{2i},X_{3i} sehingga dapat terbentuk suatu sistem persamaan linier dengan 4 perubah yaitu a_0, a_1, a_2 dan a_3 yang merupakan koefisien-koefisien dari persamaan regresi linier berganda.
b) Proses perhitungan dengan menggunakan metode Dekomposisi LU yang merupakan matriks segitiga bawah L (Lower) dan U (Upper). Pemfaktoran matriks A atas L dan U menggunakan metode LU Gauss.
c) Diperoleh a_3 = -0.1241 ; a_2 = 0.2179; a_1 = -0.0135 dan a_0 = 47.5334 sehingga persamaan regresi linier ganda yang terbentuk adalah : $\hat{Y} = 47.5334 - 0.0135\ X_1 + 0.2179\ X_2 - 0.1241\ X_3$
d) Kesalahan baku (standard error) regresi adalah 3.529242274 dengan $S_{a0} = 15.7656$, $S_{a1} = 0.4602$, $Sa2 = 0.3482$ dan $Sa3 = 0.7422$.

Daftar Pustaka

[1] Amrinsyah Nasution & Hasballah Zakaria, “Metode Numerik dalam Ilmu Rekayasa Sipil”, ITB Bandung, 2001
[2] Agus Setiawan, ST, MT, ”Pengantar Metode Numerik”, 2006. Penerbit Andi, Yogyakarta
[3] Ating Somantri, Drs, Sambas Ali Muhidin, S.Pd, ”Aplikasi Statistika Dalam Penelitian”,CV. Pustaka Setia, 2006
[4] Ardi Pujianto, ’’Komputasi Numerik dengan Matlab”, Graha Ilmu, 2007
[5] Duance Hanselman & Bruce Littlefield, ” Matlab Bahasa Komputasi Teknis”, Penerbit andi Yogyakarta
[6] Kasiman Peranginangin, 2006, “Pengenalan Matlab”, CV. Andi Offset, Yogyakarta
[7] Renaldi Munir, “Metode Numerik”, Informatika Bandung,2006
[8] Sudjana, Prof.Dr,M.A.,M.Sc., “Metode Statistika”, Tarsito Bandung, 1996.
[9] Supranto J, M. A, “Metode Ramalan Kuantitatif untuk Perencanaan Ekonomi dan Bisnis”, Penerbit Rineka Cipta