VEKTOR

Definisi Vektor

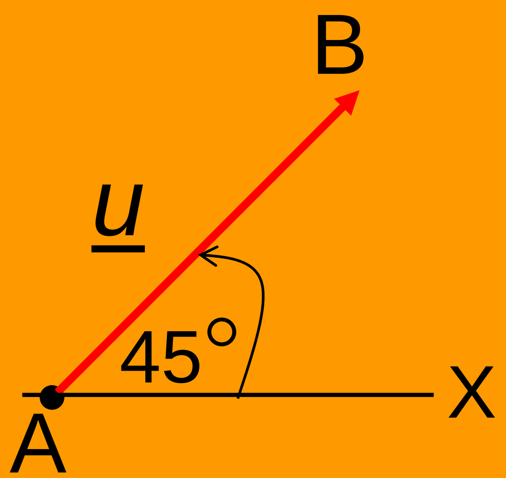
Vektor adalah besaran yang mempunyai besar dan arah

Besar vektor artinya panjang vektor

Arah vektor artinya sudut yang dibentuk dengan sumbu X positif

Vektor disajikan dalam bentuk *ruas garis berarah*

Gambar Vektor



ditulis vektor $\overrightarrow{AB}$ atau $\underline{u}$

A disebut titik pangkal

B disebut titik ujung

Notasi Penulisan Vektor

❶ Bentuk vektor kolom:

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ atau } \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

❷ Bentuk vektor baris:

$$\overrightarrow{AB} = (3, \ 4) \text{ atau } \vec{v} = (-2, \ 3, \ 0)$$

❸ Vektor ditulis dengan notasi:

i, j dan k

misal : $\underline{a} = 3i - 2j + 7k$

VEKTOR DI R^2

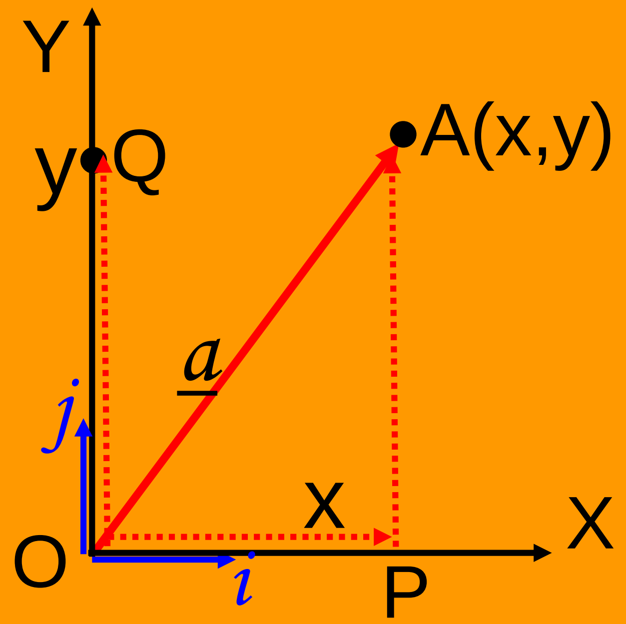
Vektor di R^2 adalah

vektor yang terletak di satu Bidang

Atau

Vektor yang hanya mempunyai dua komponen yaitu x dan y

VEKTOR DI R^2



$\underline{i}$ *vektor satuan searah sumbu* X

$\underline{j}$ *vektor satuan searah sumbu* Y

$$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA}$$

OP = x$\underline{i}$; OQ= y$\underline{j}$

Jadi

OA =x$\underline{i}$ + y$\underline{j}$

atau

$\underline{a} = x\underline{i} + y\underline{j}$

Vektor di R^3

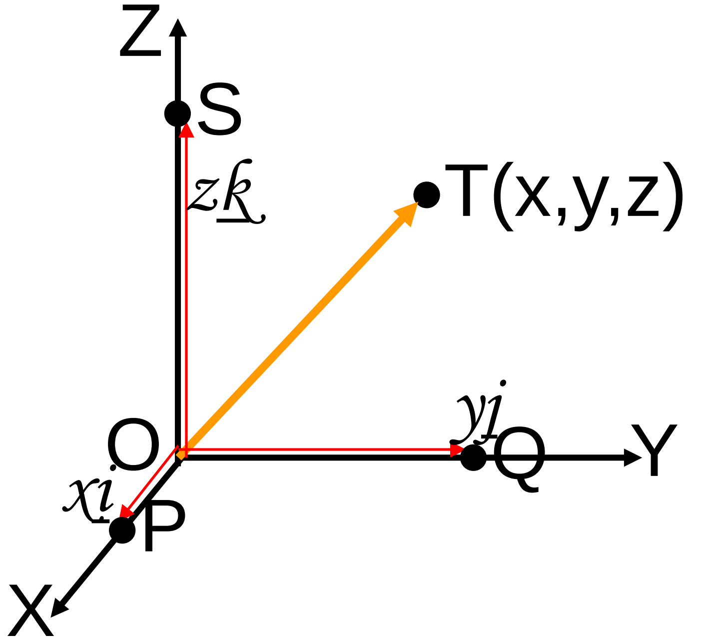
Vektor di R^3

adalah Vektor yang terletak di ruang dimensi tiga

atau

Vektor yang mempunyai tiga komponen yaitu x, y dan z

Misalkan koordinat titik T di R^3 adalah (x, y, z) maka $\overrightarrow{OP} = x\underline{i}$; $\overrightarrow{OQ} = y\underline{j}$ dan $\overrightarrow{OS} = z\underline{k}$

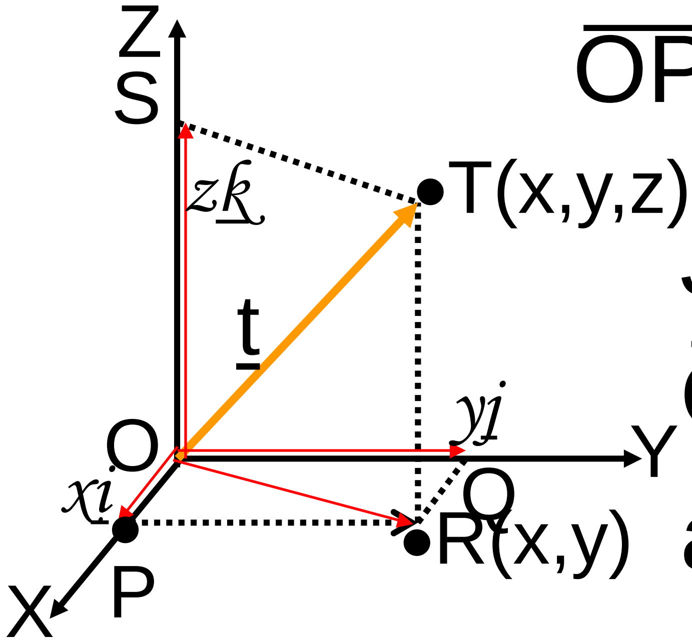


$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OR}$ atau

$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OR}$

$\overrightarrow{OR} + \overrightarrow{RT} = \overrightarrow{OT}$ atau

$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OT}$



Jadi

$\overrightarrow{OT} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$

atau $\underline{t} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$

Panjang vektor

Dilambangkan dengan

tanda 'harga mutlak'

Di R^2, panjang vektor: $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

atau $\underline{a} = a1\,i + a2\,j$

Dapat ditentukan dengan teorema Pythagoras

$$\left|\underline{a}\right| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}$$

Di R^3 , panjang vektor: $\underline{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

atau $\underline{v} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$

Dapat ditentukan dengan teorema Pythagoras

$$\left|\underline{v}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Contoh:

1. Panjang vektor: $\underline{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

adalah $|\underline{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

2. Panjang vektor: $\underline{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

adalah $|\underline{v}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}$

$= \sqrt{9} = 3$

Vektor Satuan

adalah suatu vektor yang panjangnya satu

Vektor satuan searah *sumbu X*, *sumbu Y*, dan *sumbu Z* berturut-turut adalah vektor $\underline{i}$, $\underline{j}$ *dan* $\underline{k}$

$$\underline{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad \underline{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ALJABAR VEKTOR

- Kesamaan vektor
- Penjumlahan vektor
- Pengurangan vektor
- Perkalian vektor dengan bilangan real

Kesamaan Vektor

Misalkan:

$\underline{a} = a1\,i + a2\,j + a3\,k$ dan

$\underline{b} = b1\,i + b2\,j + b3\,k$

Jika: $\underline{a} = \underline{b}$, maka

$a1 = b1$

$a2 = b2$

dan

$a3 = b3$

Kesamaan Vektor

Dua buah vektor dikatakan sama besar bila besar dan arahnya sama.

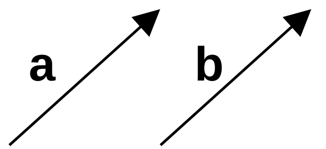
Misalkan **u** = (a,b) dan **v =** (c,d)

Jika **u** = **v**, maka

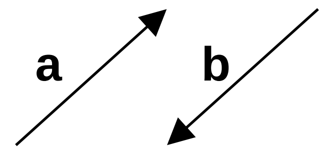
|**u**| = |**v**|

arah u = arah **v**

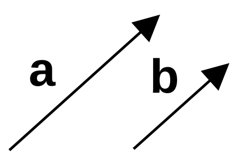
a=c dan b=d



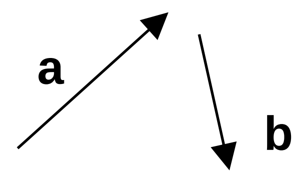
Dua vektor sama,
a = b



Dua Vektor mempunyai besar sama, arah berbeda



Dua vektor arah sama, besaran beda



Dua Vektor besar dan arah berbeda

Contoh

Diketahui:

$\underline{a} = i + xj - 3k$ dan

$\underline{b} = (x - y)i - 2j - 3k$

Jika a = b, maka x + y = ...

Jawab:

$\underline{a} = i + xj - 3k$ dan

$\underline{b} = (x - y)i - 2j - 3k$

$\underline{a} = \underline{b}$

$1 = x - y$

$x = -2$; disubstitusikan

$1 = -2 - y; \Rightarrow y = -3$

Jadi $x + y = -2 + (-3) = -5$

Penjumlahan Vektor

Misalkan: $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ dan $\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

Jika: <u>a</u> + <u>b</u> = <u>c</u> , maka vektor

$$\underline{c} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

Contoh

Diketahui: $\underline{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2p \\ -1 \end{pmatrix}$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} p \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

dan $\underline{c} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4q \\ 2 \end{pmatrix}$

Jika $\underline{a} + \underline{b} = \underline{c}$, maka $p - q$ =....

jawab: $\underline{a} + \underline{b} = \underline{c}$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2p \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4q \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 + p \\ -2p + 6 \\ (-1) + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4q \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3+p \\ -2p+6 \\ (-1)+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4q \\ 2 \end{pmatrix}$$

$3 + p = -5 \Rightarrow p = -8$

$-2p + 6 = 4q$

$16 + 6 = 4q$

$22 = 4q \Rightarrow q = 5½;$

Jadi $p – q = -8 – 5½$

$= -13½$

Pengurangan Vektor

Misalkan:

$\underline{a} = a1\underline{i} + a2\underline{j} + a3\underline{k}$

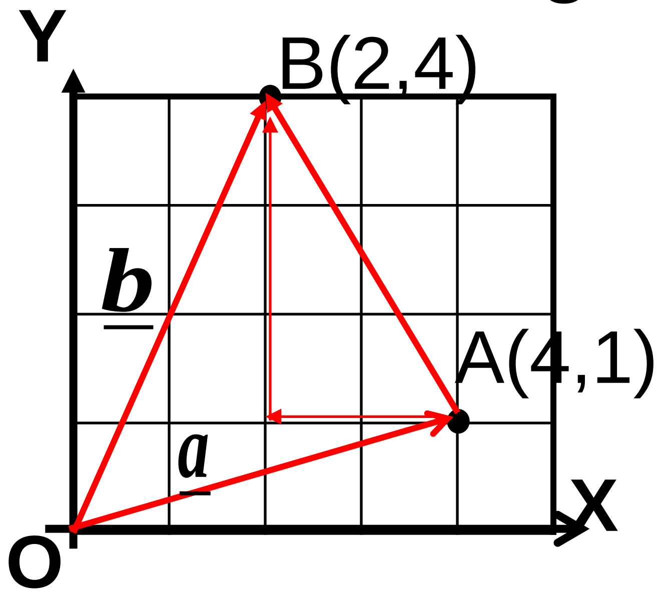
dan

$\underline{b} = b1\underline{i} + b2\underline{j} + b3\underline{k}$

Jika: $\underline{a} - \underline{b} = \underline{c}$, maka

$\underline{c} = (a1 - b1)\underline{i} + (a2 - b2)\underline{j} + (a3 - b3)\underline{k}$

Perhatikan gambar:



vektor AB = $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

vektor posisi:

titik A(4,1) adalah: $\underline{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

titik B(2,4) adalah: $\underline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\text{vektor } \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}$$

Jadi secara umum: $\boxed{\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}}$

Contoh 1

Diketahui titik-titik A(3,5,2) dan B(1,2,4). Tentukan komponen-komponen vektor $\overrightarrow{AB}$

Jawab: $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = \vec{\boldsymbol{b}} - \vec{\boldsymbol{a}}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Jadi } \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Contoh 2

Diketahui titik-titik P(-1,3,0) dan Q(1,2,-2).

Tentukan panjang vektor $\overrightarrow{PQ}$ (atau jarak P ke Q)

Jawab: P(1,2,-2) $\rightarrow \underline{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

Q(-1,3,0) $\rightarrow \underline{q} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{PQ} = \underline{q} - \underline{p} =$ $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}$$

$$\text{Jadi } \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{9} = 3$$

Perkalian Vektor dengan Bilangan Real

Misalkan: $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ dan

m = bilangan real

Jika: $\underline{c}$ = $m.\underline{a}$, maka

$$\underline{c} = m\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m.a_1 \\ m.a_2 \\ m.a_3 \end{pmatrix}$$

Contoh

Diketahui: $\underline{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$ dan $\underline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Vektor $\underline{x}$ yang memenuhi

$\underline{a} - 2\underline{x} = 3\underline{b}$ adalah....

Jawab:

misal $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 12 \end{pmatrix}$$

2 – 2x1 = 6 $\Rightarrow$ -2x1 = 4 $\Rightarrow$ x1= -2

-1 – 2x2 = -3 $\Rightarrow$ -2x2 = -2 $\Rightarrow$ x2 = 1

6 – 2x3 = 12 $\Rightarrow$ -2x3 = 6 $\Rightarrow$ x3 = -3

Jadi

$$\text{vektor } \underline{\mathrm{x}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Elemen Identitas

Vektor nol ditulis **0**

Vektor nol disebut elemen identitas

u + **0** = **0** + **u** = **u**

Jika **u** adalah sebarang vektor bukan nol, maka **–u** adalah invers aditif **u** yang didefinisikan sebagai vektor yang memiliki besar sama tetapi arah berlawanan.

u – **u** = **u** + (**-u**) = **0**

Sifat-Sifat Operasi Vektor

- Komutatif → a + b = b + a
- Asosiatif → (a+b)+c = a+(b+c)
- Elemen identitas terhadap penjumlahan
- Sifat tertutup-> hasil penjumlahan vektor juga berupa vektor
- Ketidaksamaan segitiga $|u+v| \leq |u| + |v|$
- $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$
- $\mathbf{0u} = \mathbf{0}$, $m\mathbf{0} = \mathbf{0}$.
- Jika $m\mathbf{u} = \mathbf{0}$, maka $m=0$ atau $\mathbf{u} = 0$

Sifat-Sifat Operasi Vektor (lanj.)

- $(mn)\mathbf{u} = m(n\mathbf{u})$
- $|m\mathbf{u}| = |m||\mathbf{u}|$
- $(-m\mathbf{u}) = -(m\mathbf{u}) = m(-\mathbf{u})$
- Distributif : $(m+n)\mathbf{u} = m\mathbf{u} + n\mathbf{u}$
- Distributif : $m(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = m\mathbf{u} + m\mathbf{v}$
- $\mathbf{u}+(-1)\mathbf{u} = \mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$

Dot Product (Inner Product)

- Perkalian titik (dot product) **a•b** (dibaca **a** dot **b**) antara dua vektor a dan b merupakan perkalian antara panjang vektor dan cosinus sudut antara keduanya.

$$\boxed{a \bullet b = |a||b| \cos \gamma}$$

- Dalam bentuk komponen vektor, bila a = [a_1,b_1,c_1] dan b = [a_2,b_2,c_2], maka :

$$\boxed{a \bullet b = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}$$

- **a•b > 0** jika {γ| 0 < γ < 90^o}
- **a•b** = **0** jika {γ| γ = 90^o}
- **a•b < 0** jika {γ| 90^o < γ< 180^o}

Besar dan Arah dalam Perkalian Dot Product

- Besar Sudut γ dapat dihitung dgn:

$$\boxed{\cos\gamma = \frac{a \bullet b}{|a||b|} = \frac{a \bullet b}{\sqrt{a \bullet a}\sqrt{b \bullet b}}}$$

Contoh Perkalian Dot Product

- a = [1,2,0] dan b = [3,-2,1]
- Hitung sudut antara dua vektor tsb