Persamaan Linear

- Persamaan linear adalah persamaan dimana peubahnya tidak memuat eksponensial, trigonometri (seperti sin, cos, dll.), perkalian, pembagian dengan peubah lain atau dirinya sendiri.
- Secara umum persamaan linear untuk *n* peubah $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dapat dinyatakan dalam bentuk:

  $$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

  dimana $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dan *b* adalah konstanta-konstanta real.

Contoh

Persamaan Linear

- $x + 2y = 5000$
- $3x + y = 10000$
- $2x - 3y + 5z = 30$
- $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$

Bukan Persamaan Linear

- $x^2 - 2y = 3$
- $\sin x + 2 \cos y = 0$
- $3e^{2x} - \sin (x+y) = 10$

Sistem Persamaan Linear

- Himpunan berhingga dari persamaan-persamaan linear dalam peubah x_1, x_2, …, x_n dinamakan **sistem persamaan liniear**
- Sebuah sistem sembarang yang terdiri dari *m* persamaan linear dengan *n* bilangan tak diketahui dapat dituliskan dalam bentuk:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{22}x_2 & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}
$$

Contoh

- Sistem persamaan linear tersebut dapat ditulis dalam bentuk :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

- atau

  AX* = *B

  dimana: **A** dinamakan **matriks koefisien**

  X dinamakan **matriks peubah**

  B dinamakan **matriks konstanta**

Augmented Matrix

- Sintem Persamaan Linear dapat dituliskan dalam bentuk matriks yang diperbesar (*augmented matrix*) sebagai berikut:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{22}x_2 & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

- Contoh

$$\begin{aligned} x + \ y + 2z &= 8 \\ -x - 2y + 3z &= 1 \\ 3x - 7y + 4z &= 10 \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -7 & 4 & 10 \end{bmatrix}$$

Solusi SPL

- **Solusi** sebuah sitem persamaan linear (SPL) adalah himpunan bilangan Real dimana jika disubstitusikan pada peubah suatu SPL akan memenuhi nilai kebenaran SPL tersebut.
- Contoh:

  $x - 2y = 7$

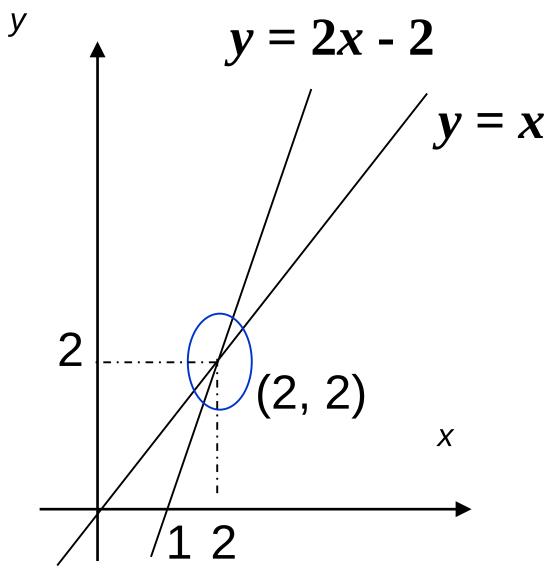
  $2x + 3y = 7$

  $\{x = 5 , y = -1\}$ merupakan solusi dari SPL tersebut

Solusi SPL

- Kemungkinan solusi dari sebuah sistem persamaan linear (SPL) adalah:
  - SPL mempunyai solusi **tunggal**
  - SPL mempunyai solusi **tak hingga banyak**
  - SPL **tidak mempunyai solusi**

Ilustrasi Solusi SPL Tunggal



(2, 2) merupakan titik potong dua garis tersebut

Tidak titik potong yang lain selain titik tersebut

Artinya : SPL $2x - y = 2$

$$x - y = 0$$

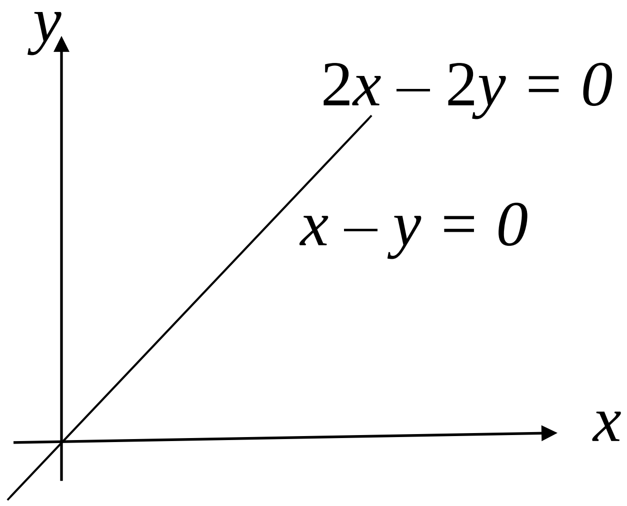
Mempunyai solusi tunggal, yaitu x = 2, y = 2

Ilustrasi Solusi SPL Tak Hingga Banyak

Perhatikan SPL

$$\begin{aligned} x - y &= 0 \\ 2x - 2y &= 0 \end{aligned}$$

Jika digambar dalam kartesius



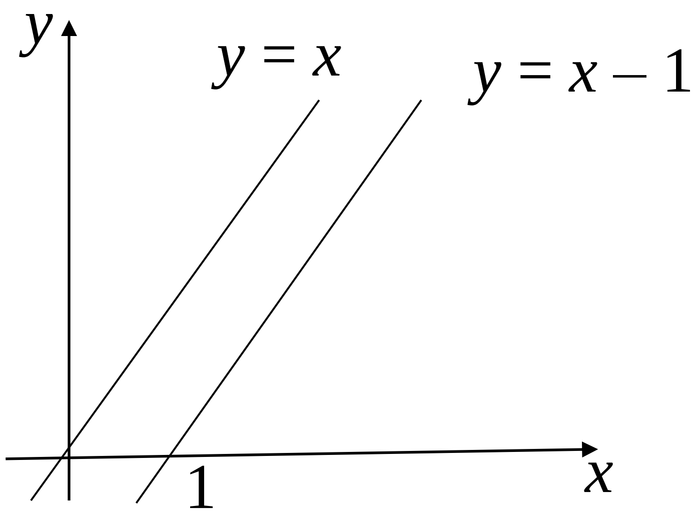
- Terlihat bahwa dua garis tersebut adalah berimpit
- Titik potong kedua garis banyak sekali disepanjang garis tersebut
- Artinya:
  SPL diatas mempunyai solusi tak hingga banyak

Ilustrasi SPL Tidak Punya Solusi

Perhatikan SPL

$$\begin{aligned} x - y &= 0 \\ 2x - 2y &= 2 \end{aligned}$$

Jika digambar dalam kartesius



- Terlihat bahwa dua garis tersebut adalah sejajar
- Tak akan pernah diperoleh titik potong kedua garis itu
- Artinya: SPL diatas TIDAK mempunyai solusi

Eliminasi Gauss-Jordan

- Eliminasi Gauss merupakan prosedur sistematik yang digunakan untuk memecahkan sistem persamaan linear.
- Prosedur ini didasarkan pada gagasan untuk mereduksi matriks yang diperbesar (*augmented marrix*) menjadi bentuk yang sederhana

Langkah-Langkah

1. Jika baris tidak terdiri seluruhnya dari nol, maka bilangan taknol pertama dalam baris tersebut adalah 1. (kita namakan ini 1 utama)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Jika terdapat baris yang seluruhnya terdiri dari nol, maka kelompokkan baris seperti ini di bawah matriks.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Langkah-Langkah

3. Dalam sembarang dua baris yang berurutan yang seluruhnya tidak terdiri dari nol, maka 1 utama dalam baris yang lebih rendah terdapat lebih jauh ke kanan dari satu utama dalam baris yang lebih tinggi.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Masing-masing kolom yang mengandung satu utama mempunyai nol di bawah satu utamanya.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Langkah-Langkah

5. Masing-masing kolom yang mengandung satu utama mempunyai nol di atas satu utamanya

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

- Sembarang matriks yang memiliki sifat 1, 2, 3, dan 4 dikatakan berada dalam bentuk *eselon baris* (**Eliminasi Gauss**).
- Jika matriks tersebut juga memiliki sifat 5 maka dikatakan berada dalam bentuk *eselon baris tereduksi*. (**Eliminasi Gaus – Jordan**)

Contoh

- Pecahkanlah sistem persamaan linear berikut dengan menggunakan eliminasi Gaus-Jordan

$$
\begin{aligned}
x + y + 2z &= 8 \\
-x - 2y + 3z &= 1 \\
3x - 7y + 4z &= 10
\end{aligned}
$$

Solusi

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -7 & 4 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow[-3b_1+b_3]{b_1+b_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 5 & 9 \\ 0 & -10 & -2 & -14 \end{bmatrix} \xrightarrow{-b_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & -10 & -2 & -14 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} -b_2+b_1 \\ 10b_2+b_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & 17 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -52 & -104 \end{bmatrix} -\frac{1}{52}b_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & 17 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{c} -7b_3+b_1 \\ 5b_3+b_2 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Jadi solusi dari SPL

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 8 \\ -x - 2y + 3z &= 1 \\ 3x - 7y + 4z &= 10 \end{aligned}$$

x = 3

y = 1

z = 2

Aturan Cramer

Misalkan SPL ditulis dalam bentuk AX = B, yaitu :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Jika determinan *A* tidak sama dengan nol

maka solusi dapat ditentukan satu persatu (peubah ke-*i*, x_i)

Langkah-Langkah

- Hitung determinan A (|A|)
- Tentukan A_{i} ➔ matriks ***A*** dimana kolom ke-*i* diganti oleh Matriks **B**.

  Contoh :

$$A_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{11} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Hitung $|A_{\mathrm{i}}|$
- Solusi SPL untuk peubah x_i adalah

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

Contoh

- Pecahkanlah sistem persamaan linear berikut dengan menggunakan aturan cramer

$$
\begin{aligned}
x + y + 2z &= 8 \\
-x - 2y + 3z &= 1 \\
3x - 7y + 4z &= 10
\end{aligned}
$$

- Solusi: Bentuk SPL menjadi AX = B

$$
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \\ 3 & -7 & 4 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 10 \end{bmatrix}
$$

Solusi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \\ 3 & -7 & 4 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 10 \end{bmatrix}$$

- det (A) = |A|(ekspansi kofaktor baris ke-1)

$$|A| = 1\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -7 & 4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & -7 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-8+21) - 1(-4-9) + 2(7+6)$$

$$= 13 + 13 + 26 = 52$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 10 & -7 & 4 \end{bmatrix}$$

$$|A_1| = 8\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -7 & 4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 10 & 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 10 & -7 \end{vmatrix}$$

$$= 8(-8+21) - 1(4-30) + 2(-7+20)$$

$$= 8(13) + 26 + 26 = 156$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & 10 & 4 \end{bmatrix}$$

$$|A_2| = 1\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 10 & 4 \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 10 \end{vmatrix}$$

$$= 1(4-30) - 8(-4-9) + 2(-10-3)$$

$$= -26) + 104 - 26 = 52$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 8 \\ -1 & -2 & 1 \\ 3 & -7 & 10 \end{bmatrix}$$

$$|A_3| = 1\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -7 & 10 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} + 8\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & -7 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-20+7) - 1(-10-3) + 8(7+6)$$

$$= -13 + 13 + 104 = 104$$

Solusi

$$x = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{156}{52} = 3$$

$$y = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{52}{52} = 1$$

$$z = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{104}{52} = 2$$

Solusi dari SPL

$$x + y + 2z = 8$$
$$-x - 2y + 3z = 1$$
$$3x - 7y + 4z = 10$$

x = 3

y = 1

z = 2

SPL Homogen

Bentuk umum:

$$
\begin{array}{cccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & 0 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n & = & 0 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = & 0
\end{array}
$$

- SPL homogen merupakan SPL yang **konsisten**,
  ➔ ***selalu mempunyai solusi***.
- Solusi SPL homogen dikatakan ***tunggal*** jika solusi itu adalah
- Jika tidak demikian,
  SPL homogen mempunyai solusi ***tak hingga*** banyak.
  (biasanya ditulis dalam ***bentuk parameter***)

Latihan Soal

Tetentukan solusi dari SPL berikut dengan Eliminasi Gauss-Jordan

1. $-2x - 3y - 4z = 2$
   $x + 3y = 1$
   $2x + 5y + z = -1$

2. $4x + 6y - 3z = 1$
   $-3x - 7y + 2z = 3$
   $x + 2y - z = 1$

3. $3x - 5y + 2z = 2$
   $-2x + 3y + 4z = 3$
   $x - 2y + z = 1$

4. $-3x + 4y - 13z = 1$
   $-x + 2y - 3z = 1$
   $2x - y + 11z = 1$

Latihan Soal

Tetentukan solusi dari SPL berikut dengan aturan cramer!

1. $$\begin{aligned} -2x - 3y - 4z &= 2 \\ x + 3y &= 1 \\ 2x + 5y + z &= -1 \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} 4x + 6y - 3z &= 1 \\ -3x - 7y + 2z &= 3 \\ x + 2y - z &= 1 \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} 3x - 5y + 2z &= 2 \\ -2x + 3y + 4z &= 3 \\ x - 2y + z &= 1 \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} -3x + 4y - 13z &= 1 \\ -x + 2y - 3z &= 1 \\ 2x - y + 11z &= 1 \end{aligned}$$