

Definisi Matriks

- **Matriks** adalah susunan segi empat siku-siku dari objek yang diatur berdasarkan baris (row) dan kolom (column).
- Objek-objek dalam susunan tersebut dinamakan **entri** dalam matriks atau disebut juga **elemen** atau **unsur**.
- Ukuran (ordo) matriks menyatakan banyaknya baris dan kolom pada matriks tersebut

Contoh Ordo Matriks

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = [2 \quad -3 \quad -1 \quad 6] \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & 6 \\ 3 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Ordo Matrik **A** : 3 X 2

Ordo Matriks **B** : 1 X 4

Ordo Matriks **C** : 4 X 4

Ordo Matriks **D** : 2 X 1

Notasi Matriks

- Matriks dinotasikan dengan huruf besar.
- Jika A adalah sebuah matriks, kita dapat juga menggunakan a_{ij} untuk menyatakan entri/unsur yang terdapat di dalam baris i dan kolom j dari A sehingga

$$A = [a_{ij}]$$

- **Contoh**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Jenis - Jenis Matriks

Matriks dibedakan berdasarkan berbagai susunan entri dan bilangan pada entrinya.

A. Matriks Nol

Matriks nol didefinisikan sebagai matriks yang setiap entri atau elemennya adalah bilangan nol.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Jenis - Jenis Matriks

B. Matriks Satu

Matriks satu didefinisikan sebagai matriks yang setiap entri atau elemennya adalah 1.

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

C. Matriks Baris

Matriks baris didefinisikan sebagai matriks yang entri atau elemennya tersusun dalam tepat satu baris.

$$\mathbf{A} = [2 \quad 1 \quad 0 \quad -3]$$

Jenis - Jenis Matriks

D. Matriks Kolom

Matriks kolom didefinisikan sebagai matriks yang entri atau elemennya tersusun dalam tepat satu kolom.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

E. Matriks Persegi

Matriks persegi didefinisikan sebagai matriks yang jumlah baris dan kolomnya sama

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 6 & -4 \\ 6 & 3 & 7 & 3 \\ 6 & 7 & 0 & 2 \\ -4 & 3 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

Jenis - Jenis Matriks

F. Matriks Segitiga Atas

Matriks segitiga atas adalah matriks persegi yang entri/elemennya memenuhi syarat: $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

$$a_{ij} = 0 \text{ untuk } i > j.$$

G. Matriks Segitiga Bawah

Matriks segitiga bawah adalah matriks persegi yang entri/elemennya memenuhi syarat:

$$a_{ij} = 0 \text{ untuk } i < j.$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

Jenis - Jenis Matriks

H. Matriks Diagonal

Matriks diagonal adalah matriks persegi yang entri/elemennya memenuhi syarat:

$a_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

I. Matriks Identitas

Matriks diagonal adalah matriks persegi yang entri/elemennya memenuhi syarat:

$a_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$ dan $a_{ij} = 1$ untuk $i = j$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jenis - Jenis Matriks

J. Matriks Transpose

Matriks transpose adalah suatu matriks yang diperoleh dari perpindahan baris menjadi kolom atau sebaliknya.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -3 \\ 9 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Kesamaan Dua Matriks

- **Definisi**

Dua matriks $A = [a_{ij}]$ dan $B = [b_{ij}]$ dikatakan sama jika :

$$a_{ij} = b_{ij}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$$

yaitu, elemen yang bersesuaian dari dua matriks tersebut adalah sama.

- **Contoh :**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -4 & -5 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & w \\ 2 & x & 4 \\ y & -4 & z \end{bmatrix}$$

Matriks A dan B dikatakan sama jika $w = -1$, $x = -3$, $y = 0$, dan $z = -5$

Operasi Pada Matriks

- **Penjumlahan (addition)**

Jika A dan B adalah sembarang dua matriks yang **ukurannya sama** maka jumlah $A + B$ adalah matriks yang diperoleh dengan menambahkan entri-entri yang bersesuaian dalam kedua matriks tersebut

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}; \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} + b_{33} \end{bmatrix}$$

Contoh + Penyelesaian

Jika

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & -6 & 4 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 7 \\ 0 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

Maka:

$$A + B = \begin{bmatrix} 7 & -4 & 12 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Operasi Pada Matriks

- **Pengurangan (subtruction)**

Jika A dan B adalah sembarang dua matriks yang **ukurannya sama** maka selisih $A - B$ adalah matriks yang diperoleh dengan mengurangkan entri-entri yang bersesuaian pada matriks B dari entri-entri pada matriks A

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}; \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & a_{13} - b_{13} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & a_{23} - b_{23} \\ a_{31} - b_{31} & a_{32} - b_{32} & a_{33} - b_{33} \end{bmatrix}$$

Contoh + Penyelesaian

Jika

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & -6 & 4 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 7 \\ 0 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

Maka:

$$A - B = \begin{bmatrix} -1 & 8 & -2 \\ 1 & -14 & 2 \end{bmatrix}$$

Operasi Pada Matriks

- **Perkalian Skalar Pada Matriks**

Jika A adalah suatu matriks dan c suatu skalar, maka hasil kali cA adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan masing-masing entri dari A oleh c .

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow c\mathbf{A} = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & ca_{13} \\ ca_{21} & ca_{22} & ca_{23} \\ ca_{31} & ca_{32} & ca_{33} \end{bmatrix}$$

Contoh Soal + Penyelesaian

Jika

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -4 & 12 \\ -1 & 2 & -6 \end{bmatrix}$$

Maka:

$$-2.A = -2 \cdot \begin{bmatrix} 7 & -4 & 12 \\ -1 & 2 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 & 8 & -24 \\ 2 & -4 & 12 \end{bmatrix}$$

Perkalian Dua Buah Matriks

Matriks $A_{m \times n}$ dapat dikalikan dengan matriks $B_{p \times q}$ jika dan hanya jika banyaknya kolom pada matriks A sama dengan banyaknya baris pada matriks B. ($n = p$)

$$A_{m \times n} B_{n \times q} = C_{m \times q}$$

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$ dan $B = [b_{ij}]_{n \times q}$ maka

$C = [c_{ij}]_{m \times q}$ dengan

$$c_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ij}$$

Contoh Soal + Penyelesaian

Tentukan AB dan BA jika:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

Jawab:

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2(1) + 1(-1) + 4(4) & 2(2) + 1(3) + 4(-1) \\ -1(1) + 3(-1) + 2(4) & -1(2) + 3(3) + 2(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Contoh Soal + Penyelesaian

$$\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1(2) + 2(-1) & 1(1) + 2(3) & 1(4) + 2(2) \\ -1(2) + 3(-1) & -1(1) + 3(3) & -1(4) + 3(2) \\ 4(2) + (-1)(-1) & 4(1) + (-1)(3) & 4(4) + (-1)2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 8 \\ -5 & 8 & 2 \\ 9 & 1 & 14 \end{bmatrix}$$

Transformasi (operasi) Elementer pada Baris dan Kolom Matriks

Transformasi Elementer pada matriks adalah:

- Penukaran tempat baris ke i dan ke j (baris ke i dijadikan baris ke j dan baris ke j dijadikan baris ke i), ditulis $H_{ij}(A)$
- Penukaran tempat kolom ke i dan kolom ke j (kolom ke i dijadikan kolom ke j atau sebaliknya), ditulis $K_{ij}(A)$
- Memperkalikan baris ke i dengan skalar $\lambda \neq 0$, ditulis $H_i^{(\lambda)}(A)$
- Memperkalikan kolom ke i dengan $\lambda \neq 0$, ditulis $K_i^{(\lambda)}(A)$
- Menambah baris ke i dengan λ kali baris ke j , ditulis $H_{ij}^{(\lambda)}(A)$

➤ Menambah kolom ke i dengan λ kali kolom ke j, ditulis

$$K_{ij}^{(\lambda)}(A)$$

Kadang untuk operasi (1) dan (3) dapat dilakukan dalam satu langkah : Menambah λ_1 kali baris ke i dengan λ_2

kali baris ke j, ditulis $H_i^{(\lambda_1)} j^{(\lambda_2)}(A)$

Demikian pula untuk untuk operasi (2) dan (4)

Bila menggunakan operasi baris maka disebut operasi baris elementer (OBE)

Contoh:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ carilah matrik B yang dihasilkan}$$

sederetan transformasi elementer $H_{31}^{(-1)}, H_2^{(2)}, H_{12},$

$K_{41}^{(1)}, K_3^{(2)}$. Carilah B tersebut.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[H_2^{(2)}]{H_{31}^{(-1)}} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 8 & 2 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{12}} \begin{pmatrix} 8 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[K_3^{(2)}]{K_{41}^{(1)}} \begin{pmatrix} 8 & 2 & 0 & 12 \\ 3 & 1 & 4 & 4 \\ -2 & 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

Bebas linear dan terpaut linier

- Kombinasi linier
- Vektor bebas linier
- Vektor terpaut linier

- Nilai pengamatan dari suatu variabel dapat disajikan dalam bentuk vektor
- Bila disajikan secara baris disebut vektor baris
- Bila disajikan dalam kolom disebut vektor kolom

- Kombinasi linier

$$\underline{b}' = c_1 \underline{a}_1' + c_2 \underline{a}_2' + \dots + c_m \underline{a}_m'$$

- Vektor terpaut linier

$$c_1 \underline{a}_1' + c_2 \underline{a}_2' + \dots + c_m \underline{a}_m' = \underline{0}' , \text{ tidak semua } c_i = 0$$

- Vektor bebas linier

$$c_1 \underline{a}_1' + c_2 \underline{a}_2' + \dots + c_m \underline{a}_m' = \underline{0}' , \text{ hanya untuk}$$

- $c_1 = c_2 = \dots = c_m = 0$

- Kombinasi linier

$$b' = c_1 \underline{a_1'} + c_2 \underline{a_2'} + \dots + c_m \underline{a_m'}$$

- Jika $a_1 = (1 \ 2 \ 0)$ dan $a_2 = (2 \ 4 \ 3)$
- dan $c_1=2$ dan $c_2=3$, maka

$$\begin{aligned} b' &= c_1 a_1 + c_2 a_2 \\ &= 2 (1 \ 2 \ 0) + 3 (2 \ 4 \ 3) \\ &= (2 \ 4 \ 0) + (6 \ 12 \ 9) \\ &= (8 \ 16 \ 9) \end{aligned}$$

- Vektor terpaut linier

$$c_1 \underline{a}_1' + c_2 \underline{a}_2' + \dots + c_m \underline{a}_m' = \underline{0}' ,$$

tidak semua $c_i = 0$

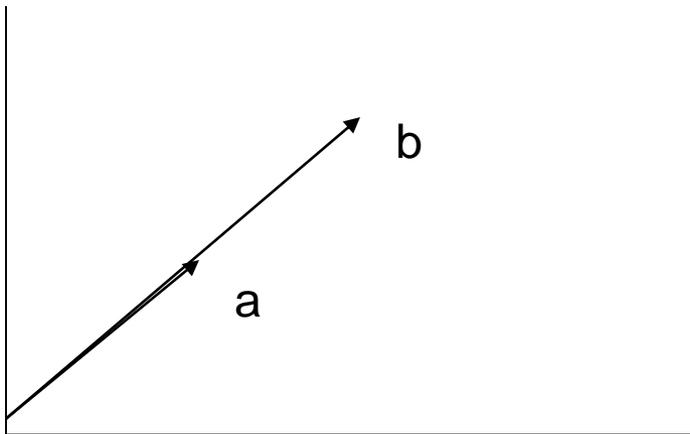
Jika $a_1 = (2 \ 4)$ dan $a_2 = (4 \ 8)$

maka a_1 dan a_2 terpaut linier, karena terdapat

$$c_1 = 1 \text{ dan } c_2 = -1/2 \text{ yang mengakibatkan } c_1 \underline{a}_1' + c_2 \underline{a}_2' = \underline{0}'$$

- Secara geometris dua vektor terpaut linier

$$a = (1 \ 1) \text{ dan } b = (2 \ 2)$$



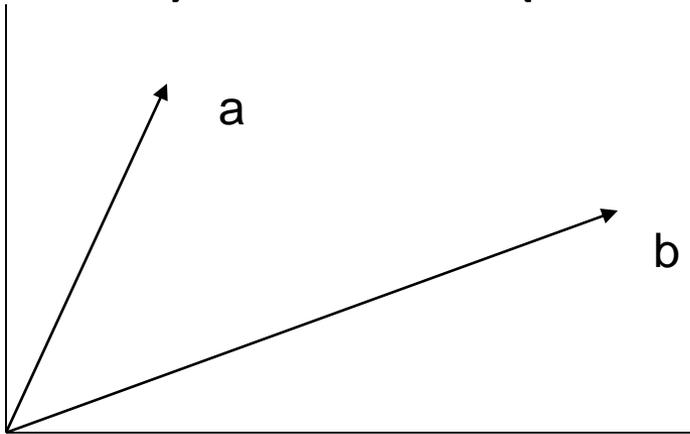
- Vektor bebas linier

$$c_1 \underline{a}_1' + c_2 \underline{a}_2' + \dots + c_m \underline{a}_m' = \underline{0}' , \text{ hanya untuk } c_1 = c_2 = \dots = c_m = 0$$

Jika $a_1 = (1 \ 4)$ dan $a_2 = (0 \ 2)$

maka a_1 dan a_2 bersifat bebas linier karena hanya $c_1=c_2=0$ yang memenuhi

- Secara geometris dua vektor bebas linier
- $a = (1 \ 4)$ dan $b = (5 \ 2)$



Rank (Pangkat) Matriks

- Banyaknya vektor baris yang bebas linier dalam suatu matriks
- Banyaknya maksimum vektor-vektor kolom yang bebas linier dalam suatu matriks
- Jika matriks bujur sangkar : ordo minor terbesar suatu matriks yang determinannya tidak nol.

Latihan Soal

1. Jika $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -5 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -1 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & -5 \end{bmatrix}$

tentukanlah:

a. $2A + B$

b. $-3B + A$

c. $A - 2B^T$

Latihan Soal

2. Diberikan matriks :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Jika mungkin, hitunglah :

a. $(AB)^t$

c. $A^t B^t$

e. $(B^t + A)C$

b. $B^t A^t$

d. $B^t C + A$