Determinan Matriks Ordo 3 × 3

- JIka $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ maka:

- det(A)= $a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{13}\,a_{21}\,a_{23} -$

  $a_{13}a_{22}\,a_{13} - a_{11}\,a_{23}\,a_{32} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33}$

  atau

$$|A| = \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{23} \end{array}\right.$$

Contoh

Tentukan determinan matriks

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Jawab :

$$\det(B) = \left| \begin{matrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{matrix} \right| \begin{matrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{matrix}$$

$$= \boxed{(3)(1)(1)} + \boxed{(2)(0)(-2)} + \boxed{(-1)(1)(-2)} - \boxed{(-1)(1)(-2)} - \boxed{(3)(0)(-2)} - \boxed{(2)(1)(1)}$$

$$= 3 + 0 + 2 - 2 - 0 - 2$$

$$= 1$$

Determinan Matriks Dengan Ekspansi Kofaktor

Misalkan

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad\; \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{pmatrix}$$

Beberapa definisi yang perlu diketahui :

- M_{ij} disebut **Minor- *ij*** yaitu determinan matriks A dengan menghilangkan baris ke_i dan kolom ke-j matriks A.

  Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ maka } M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

C_{ij} dinamakan **kofaktor - *ij*** yaitu $(-1)^{i+j} M_{ij}$

Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

maka

$$C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^3 .2$$

$$= -2$$

Rumus Determinan Matriks (Ekspansi Kofaktor)

Menghitung det (A) dengan ekspansi kofaktor sepanjang baris ke-*i*

det (A) = $a_{i1}\ C_{i1} + a_{i2}\ C_{i2} + \ldots + a_{in}C_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_{ij}$

- Menghitung det (A) dengan ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke-*j*

det (A) = $a_{1j}\ C_{1j} + a_{2j}\ C_{2j} + \ldots + a_{nj}\ C_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}c_{ij}$

Contoh

Hitunglah Det(A) dengan ekspansi kofaktor :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Jawab :

Misalkan, kita akan menghitung det (A) dengan ekspansi kofaktor ***sepanjang baris ke-3***

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \det(A) = \sum_{j=1}^{3} a_{3j} c_{3j} = a_{31}c_{31} + a_{32}c_{32} + a_{33}c_{33}$$

$$c_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1\big((1)(1) - (0)(2)\big) = 1 - 0 = 1$$

$$c_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1\big((2)(1) - (0)(1)\big) = -1(2 - 0) = -2$$

$$c_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\big((2)(2) - (1)(1)\big) = 4 - 1 = 3$$

$$\det(A) = 0(1) + 1(-2) + 2(3) = 0 - 2 + 6 = 4$$

Sifat-Sifat Determinan

A mempunyai invers jika dan hanya jika det (A) $\neq$ 0.

Beberapa sifat determinan matriks adalah :

- Jika A adalah sembarang matriks kuadrat, maka

  det (A) = det (A^t)

- Jika A dan B merupakan matriks kuadrat berukuran sama, maka :

  det (A) det (B) = det (AB)

- Jika A mempunyai invers maka :

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Matriks Kofaktor

Misalkan $A_{n \times n}$ dan C_{ij} adalah kofaktor *aij*, maka

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

Matriks **C** dinamakan **matriks kofaktor** A.
Transpos dari matriks ini dinamakan **adjoin** *A*,
notasi *adj*(A)

$$adj(A) = C^T = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

Invers Matriks Dengan Matriks Adjoin

- Misalkan A memiliki invers maka :

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)}$$

- Langkah-langkah mencari invers dengan matriks adjoin :
  - Tentukan det(A) dengan ekspansi kofaktor
  - Tentukan kofaktor dari A
  - Tentukan Matriks Kofaktor A
  - Tentukan Matriks Adj(A)

Contoh

Tentukan Matriks Kofaktor, Matriks Adjoin, dan Invers matriks dari matriks berikut.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

Solusi:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

$$c_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}$$
$$= ((-1)(8) - (3)(1))$$
$$= -8 - 3 = -11$$

$$c_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}$$
$$= -((2)(8) - (3)(4))$$
$$= -(16 - 12) = -4$$

$$c_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= ((2)(1) - (-1)(4))$$
$$= (2 + 4) = 6$$

$$c_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}$$
$$= -((0)(8) - (2)(1))$$
$$= -(0 - 2) = 2$$

$$c_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}$$
$$= ((1)(8) - (2)(4))$$
$$= 0$$

$$c_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= -((1)(1) - (0)(4))$$
$$= -(1 - 0) = -1$$

$$c_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$$
$$= ((0)(3) - (2)(-1))$$
$$= (0 + 2) = 2$$

$$c_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$
$$= -((1)(3) - (2)(2))$$
$$= -1(3 - 4) = 1$$

$$c_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= ((1)(-1) - (0)(2))$$
$$= (-1 - 0) = -1$$

- Matriks Kofaktor Matriks Adjoin (adj(A))

$$C = \begin{pmatrix} -11 & -4 & 6 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad adj(A) = \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

- Determinan Matriks A (ekspansi baris ke-1)

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1\big((-1)(8) - (3)(1)\big) - 0 + 2\big((2)(1) - (-1)(4)\big)$$

$$= (-8 - 3) + 2(2 + 4) = -11 + 12 = 1$$

- Invers Matriks A

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A) = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Operasi Baris Elementer

Operasi baris elementer meliputi :

1. Pertukaran Baris
2. Perkalian suatu baris dengan konstanta tak nol
3. Penjumlahan hasil perkalian suatu baris dengan konstanta tak nol (seperti butir 2) dengan baris yang lain.

Contoh : OBE 1 Pertukaran Baris

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} b_1 \leftrightarrow b_2 \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Baris pertama (b_1) ditukar dengan baris ke-2 (b_2)

- **Contoh : OBE 2**

  Perkalian suatu baris dengan konstanta tak nol

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \frac{1}{4} b_1 \sim \begin{bmatrix} \boxed{1 \quad -1 \quad 0 \quad -1} \\ 0 \quad 2 \quad 1 \quad 7 \\ 2 \quad -1 \quad 1 \quad 3 \end{bmatrix}$$

Perkalian Baris pertama (b_1) dengan bilangan ¼

- **Contoh : OBE 3**

  Penjumlahan hasil perkalian suatu baris dengan konstanta tak nol dengan baris yang lain.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} -2b_1 + b_3 \sim \begin{bmatrix} 1 \quad -1 \quad 0 \quad -1 \\ 0 \quad 2 \quad 1 \quad 7 \\ \boxed{0 \quad 1 \quad 1 \quad 5} \end{bmatrix}$$

Perkalian (–2) dengan b_1 lalu tambahkan pada baris ke-3 (b_3)

Definisi yang Perlu DIketahui

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Baris pertama dan ke-2 dinamakan **baris tak nol**, karena pada kedua baris tersebut memuat unsur tak nol.
- Bilangan **1** pada baris pertama dan bilangan **2** pada baris ke-2 dinamakan **unsur pertama tak nol** pada baris masing-masing.
- Bilangan 1 (pada baris baris pertama kolom pertama) dinamakan **satu utama**.
- Baris ke-3 dinamakan **baris nol**, karena setiap unsur pada baris ke-3 adalah nol.

Sifat-Sifat Matriks Hasil OBE

1. Pada baris tak nol maka unsur tak nol pertama adalah 1 (dinamakan ***satu utama***).
2. Pada baris yang berturutan, baris yang lebih rendah memuat ***1 utama yang lebih ke kanan***.
3. Jika ada ***baris nol*** (baris yang semua unsurnya nol), maka ia ***diletakkan pada baris paling bawah***.
4. Pada ***kolom yang memuat unsur 1 utama***, maka ***unsur yang lainnya adalah nol***.

- Matriks dinamakan **esilon baris jika** dipenuhi sifat 1, 2, dan 3
- Matriks dinamakan **esilon baris tereduksi jika** dipenuhi semua sifat 1, 2, 3, dan 4

Contoh

- Tentukan matriks esilon baris tereduksi dari:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 8 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Solusi

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 8 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim -3b_1 + b_3 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 8 \\ \boxed{0 \quad 4 \quad -1 \quad 5} \end{pmatrix}$$

$$\sim -\frac{1}{2}b_2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ \boxed{0 \quad 1 \quad -1 \quad -4} \\ 0 & 4 & -1 & 5 \end{pmatrix} \sim -4b_2 + b_3 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ \boxed{0 \quad 0 \quad 3 \quad 21} \end{pmatrix}$$

$$\sim \frac{1}{3}b_3 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \quad \sim b_3 + b_2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\sim b_2 + b_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Perhatikan hasil OBE tadi :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

- Setiap baris mempunyai satu utama.
- Tidak setiap kolom memiliki satu utama, karena Jumlah baris lebih sedikit dari jumlah kolom (kolom 4 tidak mempunyai satu utama)

Latihan Soal

Tentukan determinan matriks dengan ekspansi kofaktor

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 7 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 8 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 6 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

Latihan Soal

- Tentukan invers dari matriks berikut dengan menggunakan matriks adjoin:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

Latihan Soal

Tentukan bentuk eselon baris tereduksi dari matriks berikut:

1. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -4 & 2 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$