BAB 2
LOGIKA

PENGERTIAN

Logika

- Logika merupakan dasar dari semua penalaran (*reasoning*).
- Penalaran didasarkan pada hubungan antara proposisi atau pernyataan (*statements*).

Proposisi

- Kalimat deklaratif yang bernilai benar (*true*) atau salah (*false*), tetapi tidak keduanya.
- Nama lain proposisi: kalimat terbuka.

Contoh :

Semua pernyataan di bawah ini adalah proposisi:

(a) 13 adalah bilangan ganjil

(b) Soekarno adalah alumnus UGM.

(c) $1 + 1 = 2$

(d) $8 \geq$ akar kuadrat dari $8 + 8$

(e) Ada monyet di bulan

(f) Hari ini adalah hari Rabu

(g) Untuk sembarang bil. bulat $n \geq 0$, maka 2n bil. genap

(h) $x + y = y + x$ untuk setiap x dan y bilangan riil

Contoh

Semua pernyataan di bawah ini bukan proposisi

(a) Jam berapa kereta api Argo Bromo tiba di Gambir?

(b) Isilah gelas tersebut dengan air!

(c) $x + 3 = 8$

(d) $x > 3$

Kesimpulan: Proposisi adalah kalimat berita

Proposisi dilambangkan dengan huruf kecil *p*, *q*, *r*, ….

Contoh:

p : 13 adalah bilangan ganjil.

q : Soekarno adalah alumnus UGM.

r : 2 + 2 = 4

MENGKOMBINASIKAN PROPOSISI

- Misalkan p dan q adalah proposisi.

  1. **Konjungsi** (*conjunction*) : p dan q

     Notasi $p \wedge q$,

  2. **Disjungsi** (*disjunction*) : p atau q

     Notasi: $p \vee q$

  3. **Ingkaran** (*negation*) dari p : tidak p

     Notasi: $\sim p$

- p dan q disebut **proposisi atomik**
- Kombinasi p dengan q menghasilkan **proposisi majemuk** (*compound proposition)*

Contoh : Diketahui proposisi-proposisi berikut:

p : Hari ini hujan
q : Murid-murid diliburkan dari sekolah

$p \wedge q$: Hari ini hujan dan murid-murid diliburkan dari sekolah

$p \vee q$: Hari ini hujan atau murid-murid diliburkan dari sekolah

$\sim p$: Tidak benar hari ini hujan (atau: Hari ini *tidak* hujan)

Contoh Diketahui proposisi-proposisi berikut:

p : Pemuda itu tinggi
q : Pemuda itu tampan

Nyatakan dalam bentuk simbolik:

(a) Pemuda itu tinggi dan tampan
(b) Pemuda itu tinggi tapi tidak tampan
(c) Pemuda itu tidak tinggi maupun tampan
(d) Tidak benar bahwa pemuda itu pendek atau tidak tampan
(e) Pemuda itu tinggi, atau pendek dan tampan
(f) Tidak benar bahwa pemuda itu pendek maupun tampan

Penyelesaian:

(a) $p \wedge q$ (b) $p \wedge \sim q$
(c) $\sim p \wedge \sim q$ (d) $\sim(\sim p \vee \sim q)$
(e) $p \vee (\sim p \wedge q)$ (f) $\sim(\sim p \wedge \sim q)$

Tabel Kebenaran

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

p	$\sim q$
T	F
F	T

Contoh Misalkan

p : 17 adalah bilangan prima (benar)

q : bilangan prima selalu ganjil (salah)

$p \wedge q$: 17 adalah bilangan prima dan bilangan prima selalu ganjil (salah)

Contoh: Bentuklah tabel kebenaran dari proposisi majemuk $(p \wedge q) \vee (\sim q \wedge r)$.

p	q	r	$p \wedge q$	$\sim q$	$\sim q \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (\sim q \wedge r)$
T	T	T	T	F	F	T
T	T	F	T	F	F	T
T	F	T	F	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	F	F	F	F
F	T	F	F	F	F	F
F	F	T	F	T	T	T
F	F	F	F	T	F	F

- Proposisi majemuk disebut **tautologi** jika ia benar untuk semua kasus

Contoh : $p \vee {\sim}(p \wedge q)$ adalah sebuah tautologi

p	q	$p \wedge q$	${\sim}(p \wedge q)$	$p \vee {\sim}(p \wedge q)$
T	T	T	F	T
T	F	F	T	T
F	T	F	T	T
F	F	F	T	T

- Proposisi majemuk disebut **kontradiksi** jika ia salah untuk semua kasus.

Contoh . $(p \wedge q) \wedge \sim(p \vee q)$ adalah sebuah kontradiksi

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$(p \wedge q) \wedge \sim(p \vee q)$
T	T	T	F	F	F
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	F	F
F	F	F	F	T	F

Dua buah proposisi majemuk, $P(p, q, ..)$ dan $Q(p, q, ..)$ disebut **ekivalen** secara logika jika keduanya mempunyai tabel kebenaran yang identik.

Notasi: $P(p, q, \ldots) \Leftrightarrow Q(p, q, \ldots)$

Contoh . Hukum De Morgan: $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$.

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	T	T	T	T

HUKUM-HUKUM LOGIKA

Disebut juga **hukum-hukum aljabar proposisi**.

1. Hukum identitas: – $p \vee \mathbf{F} \Leftrightarrow p$ – $p \wedge \mathbf{T} \Leftrightarrow p$	2. Hukum *null*/dominasi: – $p \wedge \mathbf{F} \Leftrightarrow \mathbf{F}$ – $p \vee \mathbf{T} \Leftrightarrow \mathbf{T}$
3. Hukum negasi: – $p \vee {\sim}p \Leftrightarrow \mathbf{T}$ – $p \wedge {\sim}p \Leftrightarrow \mathbf{F}$	4. Hukum idempoten: – $p \vee p \Leftrightarrow p$ – $p \wedge p \Leftrightarrow p$
5. Hukum involusi (negasi ganda): – ${\sim}({\sim}\mathrm{p}) \Leftrightarrow p$	6. Hukum penyerapan (absorpsi): – $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$ – $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$

7. Hukum komutatif: – $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ – $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$	8. Hukum asosiatif: – $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$ – $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$
9. Hukum distributif: – $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ – $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	10. Hukum De Morgan: – $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$ – $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

PROPOSISI BERSYARAT (KONDISIONAL ATAU IMPLIKASI)

- Bentuk proposisi: “jika p, maka q”
- Notasi: $p \to q$
- Proposisi p disebut **hipotesis**, **antesenden**, **premis**, atau **kondisi**
- Proposisi q disebut **konklusi** (atau **konsekuen**).

Contoh

a. Jika saya lulus ujian, maka saya mendapat hadiah dari ayah
b. Jika suhu mencapai 80°C, maka *alarm* akan berbunyi
c. Jika anda tidak mendaftar ulang, maka anda dianggap mengundurkan diri

Cara-cara mengekspresikan implikasi $p \rightarrow q$:

- Jika *p*, maka *q*
- Jika *p*, *q*
- *p* mengakibatkan *q* (*p implies q*)
- *q* jika *p*
- *p* hanya jika *q*
- *p* syarat cukup untuk *q* (hipotesis menyatakan **syarat cukup** (*sufficient condition*))
- *q* syarat perlu untuk *p* (konklusi menyatakan **syarat perlu** (*necessary condition*))
- *q* bilamana *p* (*q whenever p*)

Contoh : Proposisi-proposisi berikut adalah implikasi dalam berbagai bentuk :

1. Jika hari hujan, maka tanaman akan tumbuh subur.
2. Jika tekanan gas diperbesar, mobil melaju kencang.
3. Es yang mencair di kutub mengakibatkan permukaan air laut naik.
4. Orang itu mau berangkat jika ia diberi ongkos jalan.
5. Ahmad bisa mengambil matakuliah Teori Bahasa Formal hanya jika ia sudah lulus matakuliah Matematika Diskrit.
6. Syarat cukup agar pom bensin meledak adalah percikan api dari rokok.
7. Syarat perlu bagi Indonesia agar ikut Piala Dunia adalah dengan mengontrak pemain asing kenamaan.
8. Banjir bandang terjadi bilamana hutan ditebangi.

Tabel kebenaran implikasi

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

- Perhatikan bahwa dalam implikasi yang dipentingkan nilai kebenaran premis dan konsekuen, bukan hubungan sebab dan akibat diantara keduanya.

- Beberapa implikasi di bawah ini valid meskipun secara bahasa tidak mempunyai makna:

  "Jika 1 + 1 = 2 maka Paris ibukota Perancis"

  "Jika *n* bilangan bulat maka hari ini hujan"

VARIAN PROPOSISI BERSYARAT

Konvers (kebalikan): $q \to p$

Invers : $\sim p \to \sim q$

Kontraposisi : $\sim q \to \sim p$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	Implikasi $p \to q$	Konvers $q \to p$	Invers $\sim p \to \sim q$	Kontraposisi $\sim q \to \sim p$
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T	T	F
F	T	T	F	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T	T	T

Contoh . Tentukan konvers, invers, dan kontraposisi dari:

"Jika Amir mempunyai mobil, maka ia orang kaya"

<u>Penyelesaian</u>:

Konvers : Jika Amir orang kaya, maka ia mempunyai mobil

Invers : Jika Amir tidak mempunyai mobil, maka ia bukan orang kaya

Kontraposisi: Jika Amir bukan orang kaya, maka ia tidak mempunyai mobil

BIKONDISIONAL (BI-IMPLIKASI)

- Bentuk proposisi: “*p* jika dan hanya jika *q*”
- Notasi: $p \leftrightarrow q$

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

- $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$.

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F
F	T	F	T	F	F
F	F	T	T	T	T

- Dengan kata lain, pernyataan "*p* jika dan hanya jika *q*" dapat dibaca "Jika *p* maka *q* dan jika *q* maka *p*".

- Cara-cara menyatakan bikondisional $p \leftrightarrow q$:
  (a) p jika dan hanya jika q.
  (b) p adalah syarat perlu dan cukup untuk q.
  (c) Jika p maka q, dan sebaliknya.
  (d) p *iff* q

Contoh . Proposisi majemuk berikut adalah bi-implikasi:

(a) 1 + 1 = 2 jika dan hanya jika 2 + 2 = 4.
(b) Syarat cukup dan syarat perlu agar hari hujan adalah kelembaban udara tinggi.
(c) Jika anda orang kaya maka anda mempunyai banyak uang, dan sebaliknya.
(d) Bandung terletak di Jawa Barat *iff* Jawa Barat adalah sebuah propinsi di Indonesia.

MODUS PONEN

- **Kaidah Modus Ponens ditulis dengan cara :**

$$\begin{array}{ll} & p \rightarrow q \\ & p \\ \hline \therefore & q \end{array}$$

- **Modus ponen menyatakan bahwa**

jika hipotesis *p* dan dan implikasi *p* $\rightarrow$ *q* benar, maka konklusi *q* benar.

MODUS *TOLLEN*

- Kaidah ini didasarkan pada tautologi $[\sim q \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow \sim p$,
- Kaidah ini modus *tollens* ditulis dengan cara:

$$\begin{array}{rl} & p \rightarrow q \\ & \sim q \\ \hline \therefore & \sim p \end{array}$$

SILOGISME

- Kaidah ini didasarkan pada tautologi $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$.
- Kaidah silogisme ditulis dengan cara:

$$\begin{array}{rl} & p \rightarrow q \\ & q \rightarrow r \\ \hline \therefore & p \rightarrow r \end{array}$$

SILOGISME DISJUNGTIF

- Kaidah ini didasarkan pada tautologi $[(p \lor q) \land {\sim}p] \rightarrow q$.
- Kaidah silogisme disjungtif ditulis dengan cara:

$$
\begin{array}{rl}
 & p \lor q \\
 & \sim p \\
\hline
\therefore & q
\end{array}
$$