Induksi Matematika

- Metode pembuktian untuk pernyataan perihal bilangan bulat adalah **induksi matematik**.

- Contoh :

  $p(n)$: "Jumlah bilangan bulat positif dari 1 sampai n adalah

  $n(n + 1)/2$".

  Buktikan $p(n)$ benar!

Contoh lainnya:

1. Setiap bilangan bulat positif n ($n \geq 2$) dapat dinyatakan sebagai perkalian dari (satu atau lebih) bilangan prima.

2. Untuk semua $n \geq 1$, $n^3 + 2n$ adalah kelipatan 3.

3. Untuk membayar biaya pos sebesar n sen dolar ($n \geq 8$) selalu dapat digunakan hanya perangko 3 sen dan 5 sen dolar.

4. Di dalam sebuah pesta, setiap tamu berjabat tangan dengan tamu lainnya hanya sekali. Jika ada n orang tamu maka jumlah jabat tangan yang terjadi adalah $n(n+1)/2$.

5. Banyaknya himpunan bagian yang dapat dibentuk dari sebuah himpunan yang beranggotakan n elemen adalah 2^n

- Induksi matematik merupakan teknik pembuktian yang baku di dalam matematika.

- Melalui induksi matematik kita dapat mengurangi langkah-langkah pembuktian bahwa semua bilangan bulat termasuk ke dalam suatu himpunan kebenaran dengan hanya sejumlah langkah terbatas.

Prinsip Induksi Sederhana.

- *Misalkan $p(n)$ adalah pernyataan perihal bilangan bulat positif dan kita ingin membuktikan bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n. Untuk membuktikan pernyataan ini, kita hanya perlu menunjukkan bahwa:*
- 1. *$p(1)$ benar, dan*
- 2. *jika $p(n)$ benar maka $p(n + 1)$ juga benar, untuk semua bilangan bulat positif $n \geq 1$,*

- Langkah 1 dinamakan **basis induksi**, sedangkan langkah 2 dinamakan **langkah induksi**.

- Langkah induksi berisi asumsi (andaian) yang menyatakan bahwa $p(n)$ benar. Asumsi tersebut dinamakan **hipotesis induksi**.

- Bila kita sudah menunjukkan kedua langkah tersebut benar maka kita sudah membuktikan bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n.

Contoh 1. Gunakan induksi matematik untuk membuktikan bahwa jumlah n buah bilangan ganjil positif pertama adalah n^2.

Penyelesaian:

(i) Basis induksi: Untuk $n = 1$, jumlah satu buah bilangan ganjil positif pertama adalah $1^2 = 1$. Ini benar karena jumlah satu buah bilangan ganjil positif pertama adalah 1.

(ii) Langkah induksi: Andaikan $p(n)$ benar, yaitu pernyataan

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$$

adalah benar (hipotesis induksi) [catatlah bahwa bilangan ganjil positif ke-n adalah $(2n - 1)$]. Kita harus memperlihatkan bahwa $p(n + 1)$ juga benar, yaitu

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) + (2n + 1) = (n + 1)^2$$

juga benar. Hal ini dapat kita tunjukkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) + (2n + 1) &= [1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)] + (2n + 1) \\ &= n^2 + (2n + 1) \\ &= n^2 + 2n + 1 \\ &= (n + 1)^2 \end{aligned}$$

Karena langkah basis dan langkah induksi keduanya telah diperlihatkan benar, maka jumlah n buah bilangan ganjil positif pertama adalah n^2.

LATIHAN SOAL

Buktikan melalui induksi matematika bahwa untuk semua $n \geq 1$:

1. $1(2) + 2(3) + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$
2. $\frac{1}{1(2)} + \frac{1}{2(3)} + \frac{1}{3(4)} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$
3. $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$
4. $3 + 5 + 7 + \ldots + (2n+1) = n^2 + 2n$
5. $6 + 10 + 14 + \ldots + (4n+2) = 2n^2 + 4n$
6. $1 + 4 + 16 + \ldots + 4^{n-1} = \frac{1}{3}(4^n - 1)$
7. $4 + 8 + 12 + \ldots + 4n = 2(n^2 + n)$
8. $1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots + n(n+1) = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$
9. $4 + 7 + 10 + \ldots + (3n+1) = \frac{1}{2} n(3n+5)$
10. $1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \ldots + n(n+1)(n+2) = \frac{1}{4} n(n+1)(n+2)(n+3)$

Prinsip Induksi yang Dirampatkan

Misalkan $p(n)$ adalah pernyataan perihal bilangan bulat dan kita ingin membuktikan bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat $n \geq n_0$. Untuk membuktikan ini, kita hanya perlu menunjukkan bahwa:

1. *$p(n_0)$ benar, dan*
2. *jika $p(n)$ benar maka $p(n+1)$ juga benar, untuk semua bilangan bulat $n \geq n_0$,*

Contoh 2. Untuk semua bilangan bulat tidak-negatif *n*, buktikan dengan induksi matematik bahwa $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

<u>Penyelesaian</u>:

(i) Basis induksi. Untuk $n = 0$ (bilangan bulat tidak negatif pertama), kita peroleh: $2^0 = 2^{0+1} - 1$.

Ini jelas benar, sebab $2^0 = 1 = 2^{0+1} - 1$

$$= 2^1 - 1$$
$$= 2 - 1$$
$$= 1$$

(ii) Langkah induksi. Andaikan bahwa p(n) benar, yaitu

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

adalah benar (hipotesis induksi). Kita harus menunjukkan bahwa p(n +1) juga benar, yaitu

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n + 2^{n+1} = 2^{(n+1)+1} - 1$$

juga benar. Ini kita tunjukkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n + 2^{n+1} &= (2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n) + 2^{n+1} \\
&= (2^{n+1} - 1) + 2^{n+1} \text{ (hipotesis induksi)} \\
&= (2^{n+1} + 2^{n+1}) - 1 \\
&= (2 \,.\, 2^{n+1}) - 1 \\
&= 2^{n+2} - 1 \\
&= 2^{(n+1)+1} - 1
\end{aligned}$$

Karena langkah 1 dan 2 keduanya telah diperlihatkan benar, maka untuk semua bilangan bulat tidak-negatif *n*, terbukti bahwa $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ ■

LATIHAN

- **Contoh 3.** Buktikan dengan induksi matematik bahwa pada sebuah himpunan beranggotakan n elemen, banyaknya himpunan bagian yang dapat dibentuk dari himpunan tersebut adalah 2^n.

Contoh 5. Buktikan pernyataan "Untuk membayar biaya pos sebesar n sen ($n \geq 8$) selalu dapat digunakan hanya perangko 3 sen dan perangko 5 sen" benar.

Penyelesaian:

(i) Basis induksi. Untuk membayar biaya pos 8 sen dapat digunakan 1 buah perangko 3 sen dan 1 buah perangka 5 sen saja. Ini jelas benar.

(ii) Langkah induksi. Andaikan $p(n)$ benar, yaitu untuk membayar biaya pos sebesar n ($n \geq 8$) sen dapat digunakan perangko 3 sen dan 5 sen (hipotesis induksi). Kita harus menunjukkan bahwa $p(n + 1)$ juga benar, yaitu untuk membayar biaya pos sebesar $n + 1$ sen juga dapat menggunakan perangko 3 sen dan perangko 5 sen. Ada dua kemungkinan yang perlu diperiksa:

(a) Kemungkinan pertama, misalkan kita membayar biaya pos senilai n sen dengan sedikitnya satu perangko 5 sen. Dengan mengganti satu buah perangko 5 sen dengan dua buah perangko 3 sen, akan diperoleh susunan perangko senilai $n + 1$ sen.

(b) Kemungkinan kedua, jika tidak ada perangko 5 sen yang digunakan, biaya pos senilai n sen menggunakan perangko 3 sen semuanya. Karena $n \geq 8$, setidaknya harus digunakan tiga buah perangko 3 sen. Dengan mengganti tiga buah perangko 3 sen dengan 2 buah perangko 5 sen, akan dihasilkan nilai perangko $n + 1$ sen. ■

LATIHAN

- **Contoh 6.** Sebuah ATM (Anjungan Tunai Mandiri) hanya menyediakan pecahan uang Rp 20.000,- dan Rp 50.000, -. Kelipatan uang berapakah yang dapat dikeluarkan oleh ATM tersebut? Buktikan jawaban anda dengan induksi matematik.

Prinsip Induksi Kuat

- *Misalkan p(n) adalah pernyataan perihal bilangan bulat dan kita ingin membuktikan bahwa p(n) benar untuk semua bilangan bulat $n \geq n_0$. Untuk membuktikan ini, kita hanya perlu menunjukkan bahwa:*

  1. $p(n_0)$ benar, dan

  2. jika $p(n_0)$, $p(n_0+1)$, …, $p(n)$ benar maka $p(n+1)$ juga benar untuk semua bilangan bulat $n \geq n_0$,.

Langkah induksi. Misalkan pernyataan bahwa bilangan 2, 3, …, n dapat dinyatakan sebagai perkalian (satu atau lebih) bilangan prima adalah benar (hipotesis induksi). Kita perlu menunjukkan bahwa $n + 1$ juga dapat dinyatakan sebagai perkalian bilangan prima. Ada dua kemungkinan nilai n + 1:

(a) Jika $n + 1$ sendiri bilangan prima, maka jelas ia dapat dinyatakan sebagai perkalian satu atau lebih bilangan prima.

(b) Jika $n + 1$ bukan bilangan prima, maka terdapat bilangan bulat positif a yang membagi habis $n + 1$ tanpa sisa. Dengan kata lain,

$$(n + 1)/ a = b \quad \text{atau } (n + 1) = ab$$

yang dalam hal ini, $2 \leq a \leq b \leq n$. Menurut hipotesis induksi, a dan b dapat dinyatakan sebagai perkalian satu atau lebih bilangan prima. Ini berarti, $n + 1$ jelas dapat dinyatakan sebagai perkalian bilangan prima, karena $n + 1 = ab$.

Karena langkah (i) dan (ii) sudah ditunjukkan benar, maka terbukti bahwa setiap bilangan bulat positif n ($n \geq 2$) dapat dinyatakan sebagai perkalian dari (satu atau lebih) bilangan prima.

Contoh 7. Bilangan bulat positif disebut prima jika dan hanya jika bilangan bulat tersebut habis dibagi dengan 1 dan dirinya sendiri. Kita ingin membuktikan bahwa setiap bilangan bulat positif n ($n \geq 2$) dapat dinyatakan sebagai perkalian dari (satu atau lebih) bilangan prima. Buktikan dengan prinsip induksi kuat.

Penyelesaian:

Basis induksi. Jika $n = 2$, maka 2 sendiri adalah bilangan prima dan di sini 2 dapat dinyatakan sebagai perkalian dari satu buah bilangan prima, yaitu dirinya sendiri.

Penyelesaian: langkah induksi tidak benar jika $n + 1 = 2$, sebab dua himpunan (yang masing-masing beranggotakan $n = 1$ elemen) tidak beririsan.