FUNGSI

- Misalkan A dan B himpunan.
  Relasi biner f dari A ke B merupakan suatu fungsi jika *setiap* elemen di dalam A dihubungkan dengan tepat satu elemen di dalam B.

  Jika f adalah fungsi dari A ke B kita menuliskan

  $$f : A \rightarrow B$$

  yang artinya f **memetakan** A ke B.

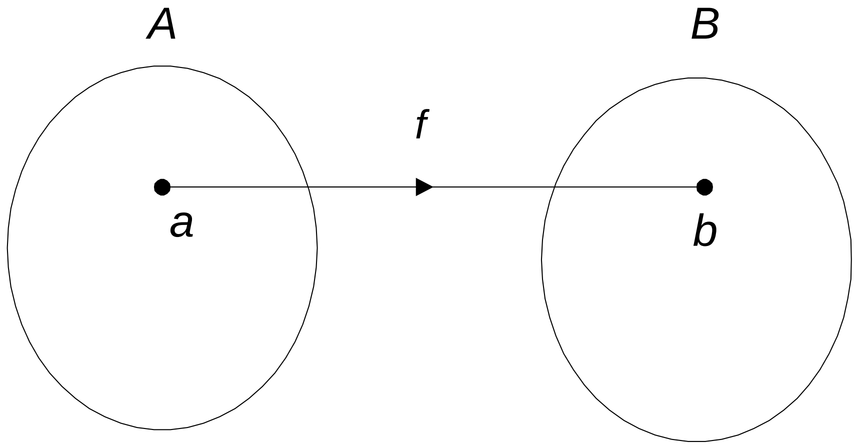
- A disebut **daerah asal** (*domain*) dari f dan B disebut **daerah hasil** (*codomain*) dari f.

- Nama lain untuk fungsi adalah **pemetaan** atau **transformasi**.

- Kita menuliskan $f(a) = b$ jika elemen a di dalam A dihubungkan dengan elemen b di dalam B.

- Jika $f(a) = b$, maka b dinamakan **bayangan** (*image*) dari a dan a dinamakan **pra-bayangan** (*pre-image*) dari b.

- Himpunan yang berisi semua nilai pemetaan f disebut **jelajah** (*range*) dari f. Perhatikan bahwa jelajah dari f adalah himpunan bagian (mungkin *proper subset*) dari B.



- Fungsi adalah relasi yang khusus:
  1. Tiap elemen di dalam himpunan *A* harus digunakan oleh prosedur atau kaidah yang mendefinisikan *f*.

  2. Frasa "dihubungkan dengan tepat satu elemen di dalam *B*" berarti bahwa jika $(a, b) \in f$ dan $(a, c) \in f$, maka $b = c$.

- Fungsi dapat dispesifikasikan dalam berbagai bentuk, diantaranya:
  1. Himpunan pasangan terurut.
     Seperti pada relasi.

  2. Formula pengisian nilai (*assignment*).
     Contoh: $f(x) = 2x + 10$, $f(x) = x^2$, dan $f(x) = 1/x$.

  3. Kata-kata
     Contoh: "*f* adalah fungsi yang memetakan jumlah bit 1 di dalam suatu *string* biner".

  4. Kode program (*source code*)
     Contoh: Fungsi menghitung $|x|$

```
function abs(x:integer):integer;
begin
   if x < 0 then
      abs:=-x
   else
      abs:=x;
end;
```

Contoh 1. Relasi

$$f = \{(1, u), (2, v), (3, w)\}$$

dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ adalah fungsi dari A ke B. Di sini $f(1) = u$, $f(2) = v$, dan $f(3) = w$. Daerah asal dari f adalah A dan daerah hasil adalah B. Jelajah dari f adalah $\{u, v, w\}$, yang dalam hal ini sama dengan himpunan B.

Contoh 2. Relasi

$$f = \{(1, u), (2, u), (3, v)\}$$

dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ adalah fungsi dari A ke B, meskipun u merupakan bayangan dari dua elemen A. Daerah asal fungsi adalah A, daerah hasilnya adalah B, dan jelajah fungsi adalah $\{u, v\}$.

Contoh 3. Relasi

$$f = \{(1, u), (2, v), (3, w)\}$$

dari $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ bukan fungsi, karena tidak semua elemen A dipetakan ke B.

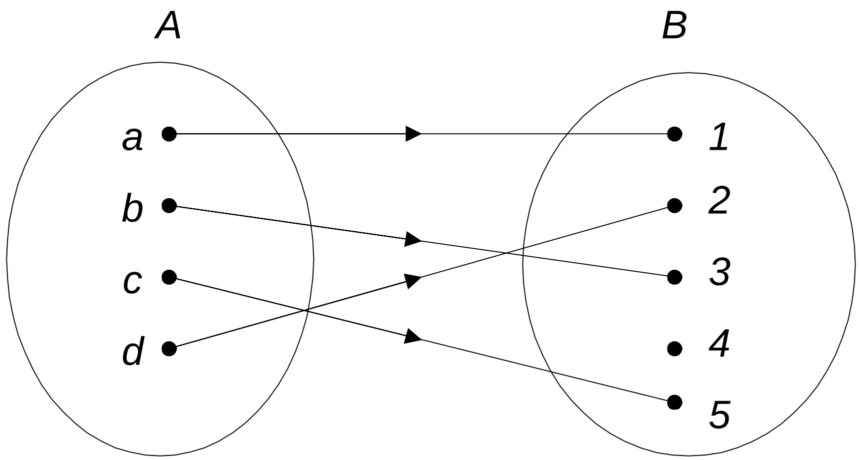
Contoh 4. Relasi

$$f = \{(1, u), (1, v), (2, v), (3, w)\}$$

dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ bukan fungsi, karena 1 dipetakan ke dua buah elemen B, yaitu u dan v.

Contoh 5. Misalkan $f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$ didefinisikan oleh $f(x) = x^2$. Daerah asal dan daerah hasil dari f adalah himpunan bilangan bulat, dan jelajah dari f adalah himpunan bilangan bulat tidak-negatif.

- Fungsi *f* dikatakan **satu-ke-satu** (*one-to-one*) atau **injektif** (*injective*) jika tidak ada dua elemen himpunan *A* yang memiliki bayangan sama.



Contoh 6. Relasi

$$f = \{(1, w), (2, u), (3, v)\}$$

dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w, x\}$ adalah fungsi satu-ke-satu,

Tetapi relasi

$$f = \{(1, u), (2, u), (3, v)\}$$

dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ bukan fungsi satu-ke-satu, karena $f(1) = f(2) = u$.

Contoh 7. Misalkan $f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$. Tentukan apakah $f(x) = x^2 + 1$ dan $f(x) = x - 1$ merupakan fungsi satu-ke-satu?

Penyelesaian:

(i) $f(x) = x^2 + 1$ bukan fungsi satu-ke-satu, karena untuk dua x yang bernilai mutlak sama tetapi tandanya berbeda nilai fungsinya sama, misalnya $f(2) = f(-2) = 5$ padahal $-2 \neq 2$.

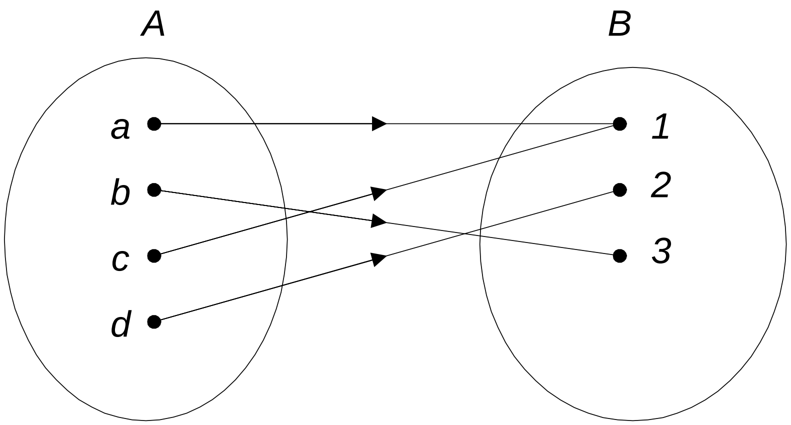
(ii) $f(x) = x - 1$ adalah fungsi satu-ke-satu karena untuk $a \neq b$,

$a - 1 \neq b - 1$.

Misalnya untuk $x = 2$, $f(2) = 1$ dan untuk $x = -2$, $f(-2) = -3$.

- Fungsi *f* dikatakan dipetakan **pada** (*onto*) atau **surjektif** (*surjective*) jika setiap elemen himpunan *B* merupakan bayangan dari satu atau lebih elemen himpunan *A*.

- Dengan kata lain seluruh elemen *B* merupakan jelajah dari *f*. Fungsi *f* disebut fungsi pada himpunan *B*.



Contoh 8. Relasi

$$f = \{(1, u), (2, u), (3, v)\}$$

dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ bukan fungsi pada karena w tidak termasuk jelajah dari f.

Relasi

$$f = \{(1, w), (2, u), (3, v)\}$$

dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ merupakan fungsi pada karena semua anggota B merupakan jelajah dari f.

Contoh 9. Misalkan $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$. Tentukan apakah $f(x) = x^2 + 1$ dan $f(x) = x - 1$ merupakan fungsi pada?

Penyelesaian:

(i) $f(x) = x^2 + 1$ bukan fungsi pada, karena tidak semua nilai bilangan bulat merupakan jelajah dari f.

(ii) $f(x) = x - 1$ adalah fungsi pada karena untuk setiap bilangan bulat y, selalu ada nilai x yang memenuhi, yaitu $y = x - 1$ akan dipenuhi untuk $x = y + 1$.

- Fungsi f dikatakan **berkoresponden satu-ke-satu** atau **bijeksi** (*bijection*) jika ia fungsi satu-ke-satu dan juga fungsi pada.

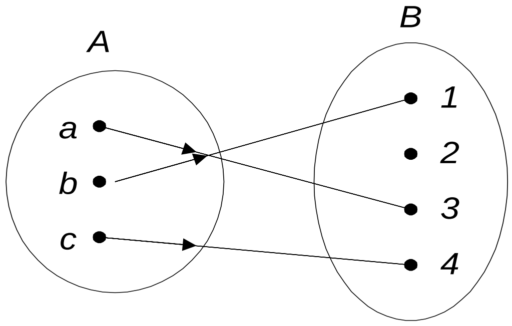
Contoh 10. Relasi

$$f = \{(1, u), (2, w), (3, v)\}$$

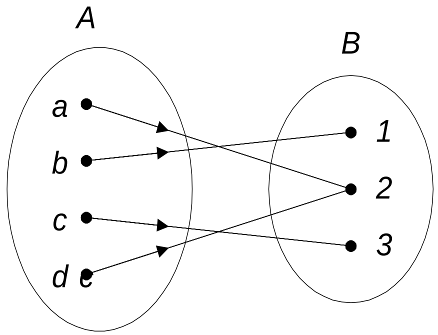
dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ adalah fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu, karena f adalah fungsi satu-ke-satu maupun fungsi pada.

Contoh 11. Fungsi $f(x) = x - 1$ merupakan fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu, karena f adalah fungsi satu-ke-satu maupun fungsi pada.

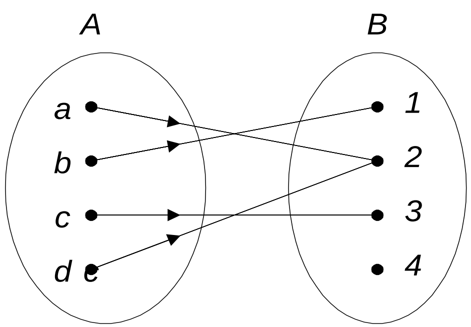
Fungsi satu-ke-satu,
bukan pada



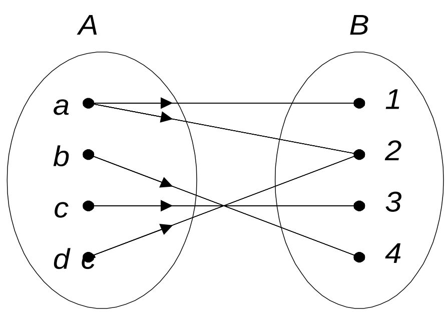
Fungsi pada,
bukan satu-ke-satu



Buka fungsi satu-ke-satu
maupun pada



Bukan fungsi



- Jika f adalah fungsi berkoresponden satu-ke-satu dari A ke B, maka kita dapat menemukan **balikan** (*invers*) dari f.

- Balikan fungsi dilambangkan dengan f^{-1}. Misalkan a adalah anggota himpunan A dan b adalah anggota himpunan B, maka $f^{-1}(b) = a$ jika $f(a) = b$.

- Fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu sering dinamakan juga fungsi yang *invertible* (dapat dibalikkan), karena kita dapat mendefinisikan fungsi balikannya. Sebuah fungsi dikatakan *not invertible* (tidak dapat dibalikkan) jika ia bukan fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu, karena fungsi balikannya tidak ada.

Contoh 12. Relasi

$$f = \{(1, u), (2, w), (3, v)\}$$

dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ adalah fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu. Balikan fungsi f adalah

$$f^{-1} = \{(u, 1), (w, 2), (v, 3)\}$$

Jadi, f adalah fungsi *invertible*.

Contoh 13. Tentukan balikan fungsi $f(x) = x - 1$.

Penyelesaian:
Fungsi $f(x) = x - 1$ adalah fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu, jadi balikan fungsi tersebut ada.
Misalkan $f(x) = y$, sehingga $y = x - 1$, maka $x = y + 1$. Jadi, balikan fungsi balikannya adalah $f^{-1}(y) = y + 1$.

Contoh 14. Tentukan balikan fungsi $f(x) = x^2 + 1$.

Penyelesaian:

Dari Contoh kita sudah menyimpulkan bahwa $f(x) = x – 1$ bukan fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu, sehingga fungsi balikannya tidak ada. Jadi, $f(x) = x^2 + 1$ adalah funsgi yang *not invertible*.

Komposisi dari dua buah fungsi.

Misalkan g adalah fungsi dari himpunan A ke himpunan B, dan f adalah fungsi dari himpunan B ke himpunan C. Komposisi f dan g, dinotasikan dengan $f \circ g$, adalah fungsi dari A ke C yang didefinisikan oleh

$$(f \circ g)(a) = f(g(a))$$

Contoh 15. Diberikan fungsi

$$g = \{(1, u), (2, u), (3, v)\}$$

yang memetakan $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$, dan fungsi

$$f = \{(u, y), (v, x), (w, z)\}$$

yang memetakan $B = \{u, v, w\}$ ke $C = \{x, y, z\}$. Fungsi komposisi dari A ke C adalah

$$f \circ g = \{(1, y), (2, y), (3, x) \}$$

Contoh 16. Diberikan fungsi $f(x) = x - 1$ dan $g(x) = x^2 + 1$. Tentukan $f \circ g$ dan $g \circ f$.

<u>Penyelesaian</u>:
(i) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 1) = x^2 + 1 - 1 = x^2$.
(ii) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x - 1) = (x - 1)^2 + 1 = x^2 - 2x + 2$.