

Transformasi Geometri Sederhana



Transformasi Dasar

- Pada Aplikasi Grafika diperlukan perubahan bentuk, ukuran dan posisi suatu gambar yang disebut dengan manipulasi.
- Perubahan gambar dengan mengubah koordinat dan ukuran suatu objek disebut transformasi geometri.
- Transformasi dasar dapat berupa translasi, skala dan rotasi. Selain itu masih ada bentuk transformasi lain seperti pencerminan (refleksi) dan pergeseran (shear).

A. Translasi

- Translasi dilakukan dengan melakukan penambahan faktor translasi / translasi vector / shift vector yaitu (t_x, t_y) pada suatu titik koordinat.

Dimana:

t_x : translasi vector pada sumbu x

t_y : translasi vector pada sumbu y



- Koordinat baru titik hasil translasi rumus berikut :

$$x' = x + t_x$$

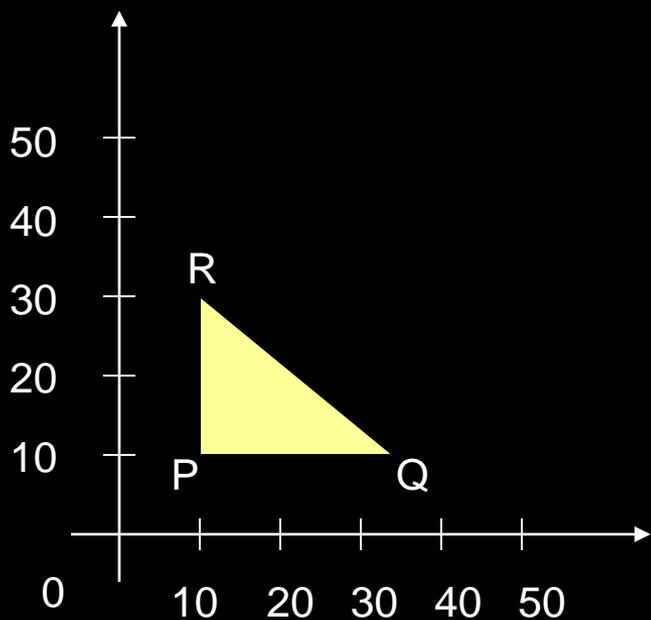
$$y' = y + t_y$$

dimana:

(x, y) : Koordinat asal

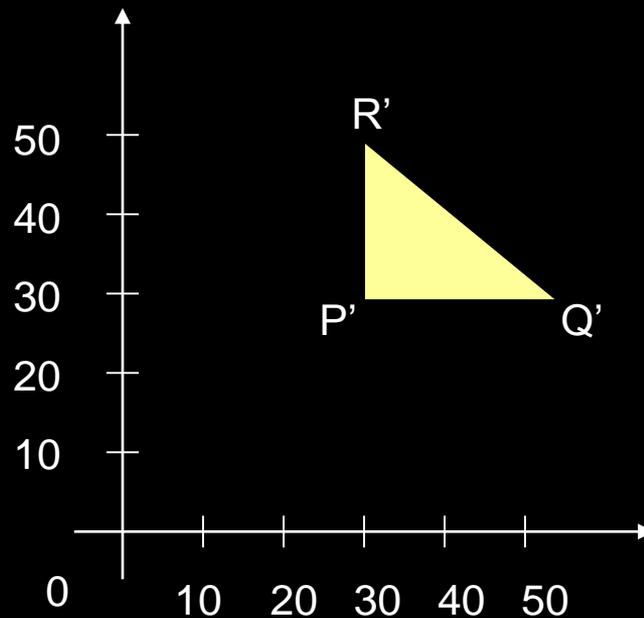
(x', y') : Koordinat baru hasil translasi

- Translasi adalah transformasi tanpa merubah bentuk objek (bentuk tetap).
- Setiap titik pada objek akan ditranslasi dengan besarn yang sama dan titik yang ditranslasi dipindahkan ke lokasi lain menurut garis lurus.
- Hal yang sama dilakukan untuk seluruh titik pada objek dengan jarak sama untuk setiap titik.
- Gambar berikut ini memperlihatkan proses translasi;

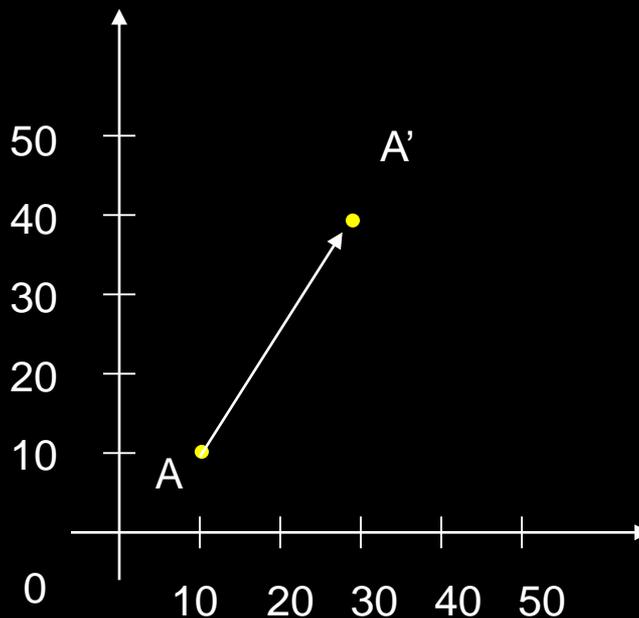


Titik P (10,10)

$(t_x, t_y) = (20,20)$



Titik P' (30,30)





- Kadang-kadang transformasi dinyatakan dalam bentuk matriks, sehingga matriks transformasi untuk translasi dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$P = \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{bmatrix}$$

$$P' = \begin{bmatrix} X'_1 \\ Y'_1 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}$$

- Dengan demikian translasi 2 D dapat dinyatakan dalam bentuk matriks:

$$P' = P + T$$

- Selain dalam bentuk vektor kolom, matriks transformasi dapat dituliskan dalam bentuk vektor baris, sehingga menjadi :

$$P = [x \ y] \quad \text{dan} \quad T = [t_x \ t_y]$$



B. Skala

- Transformasi skala adalah perubahan ukuran suatu objek.
- Koordinat baru dapat diperoleh dengan melakukan perkalian nilai koordinat dengan faktor skala (scaling factor), yaitu (s_x, s_y) .

Dimana:

s_x : scaling factor pada sumbu x

s_y : scaling factor pada sumbu y

- Koordinat baru yang dihasilkan diperoleh dari persamaan :

$$x' = x \cdot s_x$$

$$y' = y \cdot s_y$$

dimana:

(x, y) : Koordinat asal

(x', y') : Koordinat baru hasil penskalaan



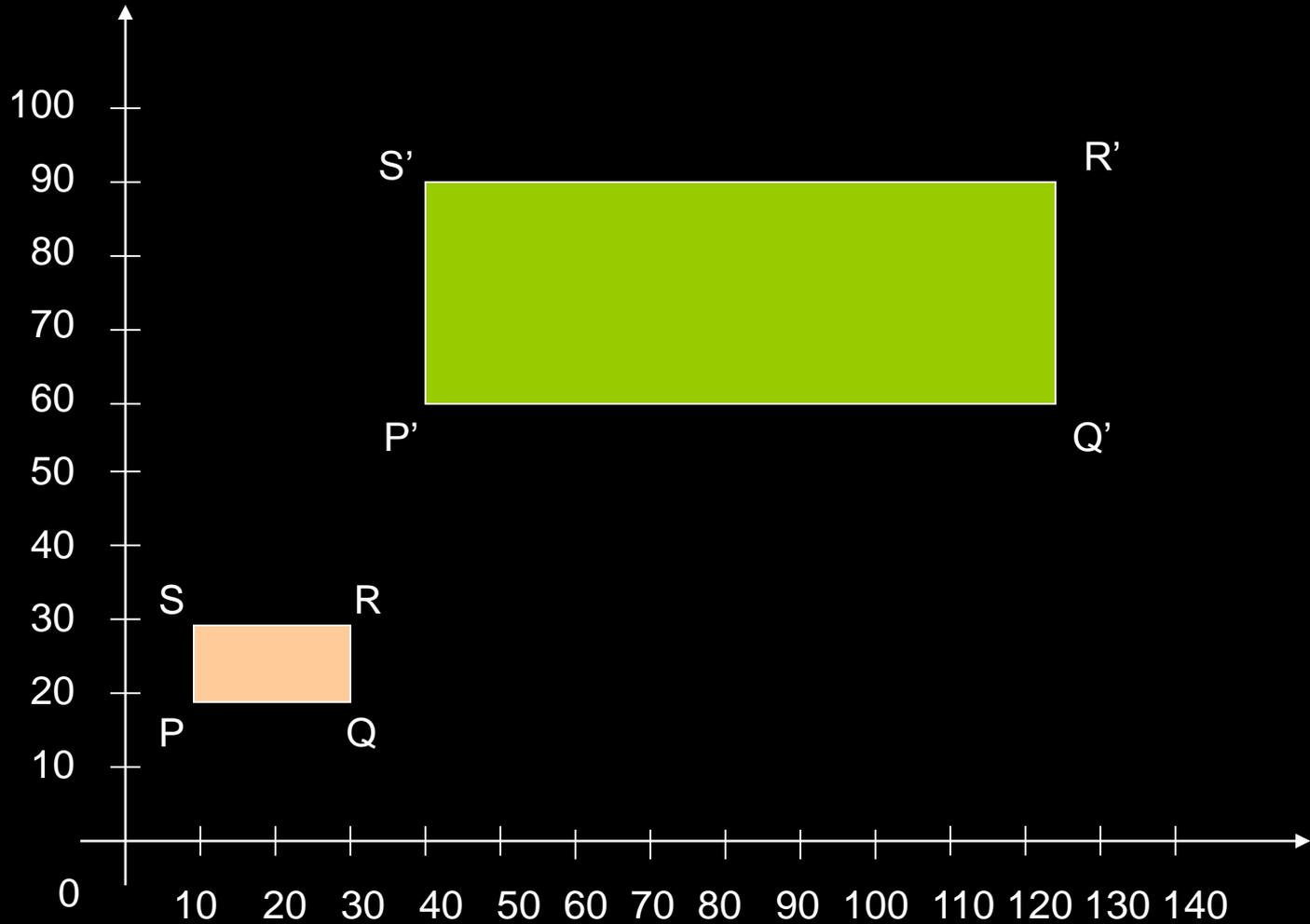
- Matriks transformasi untuk skala dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ s_2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

- Dapat juga dituliskan dalam bentuk :

$$P' = S \cdot P$$

- Scaling factor s_x dan s_y merupakan sembarang bilangan positif.
- Jika scaling factor bernilai lebih besar dari 1, maka berarti objek diperbesar sebaliknya jika nilainya lebih kecil dari 1, maka berarti objek diperkecil.
- Jika nilai s_x dan s_y sama maka skala disebut uniform scaling, artinya proses perbesaran objek atau pengecilan objek seragam, jika tidak disebut differential scaling



Hasil perbesaran dengan scaling faktor (4,3)



C. Skala Dengan Fixed Point

- Lokasi skala suatu objek dapat dikontrol dengan menentukan titik tertentu yang disebut fixed point.
- Koordinat fixed point (x_f, y_f) dapat ditentukan pada sembarang posisi.
- Poligon kemudian diskala relatif terhadap fixed point dengan melakukan skala jarak dari tiap titik terhadap fixed point.
- Penskalaan dengan fixed point dinyatakan dalam bentuk:

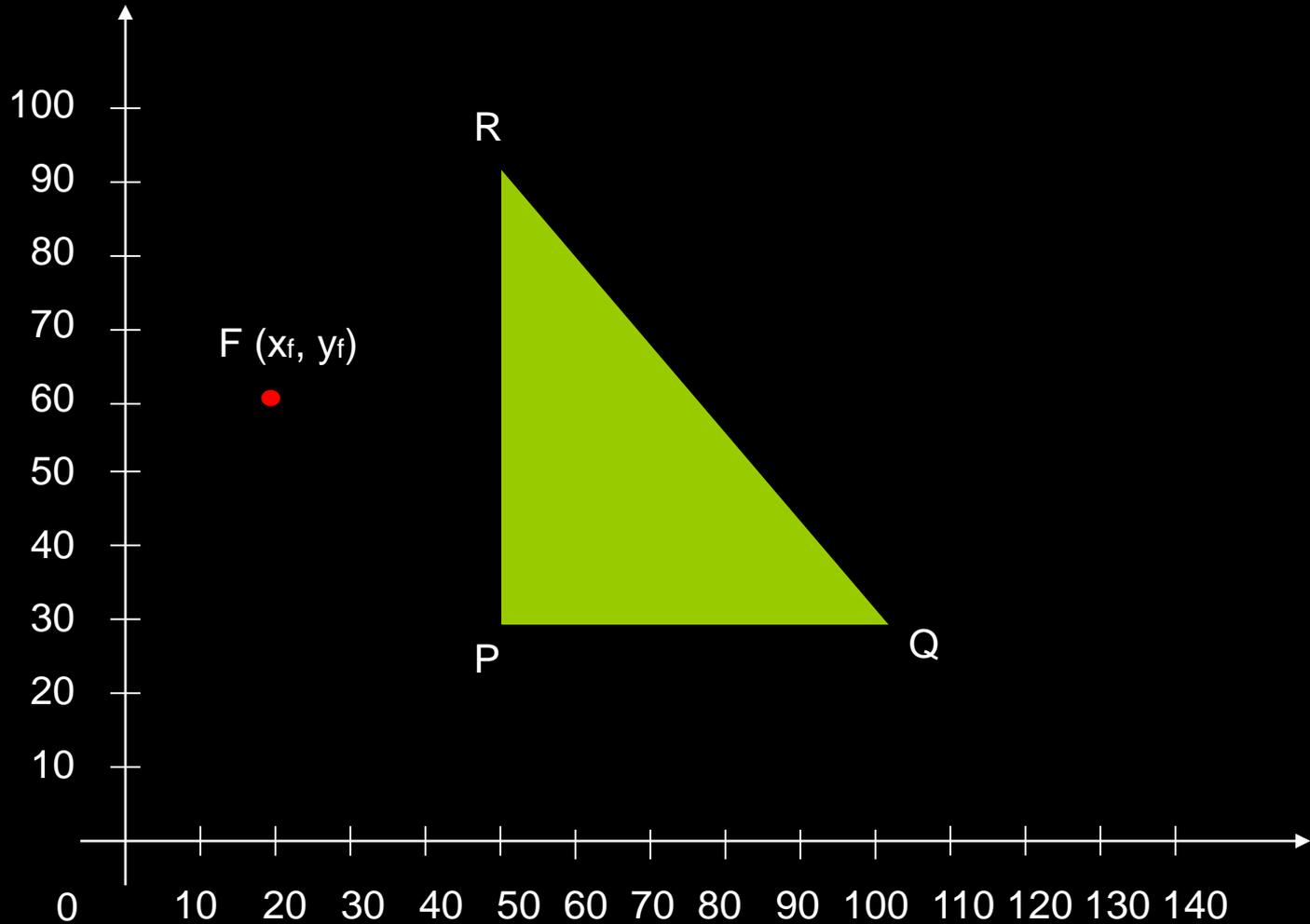
$$x' = x_f + (x - x_f) S_x$$

$$y' = y_f + (y - y_f) S_y$$

dimana :

(x, y) : Koordinat asal

(x', y') : Koordinat baru hasil penskalaan dgn fixed point

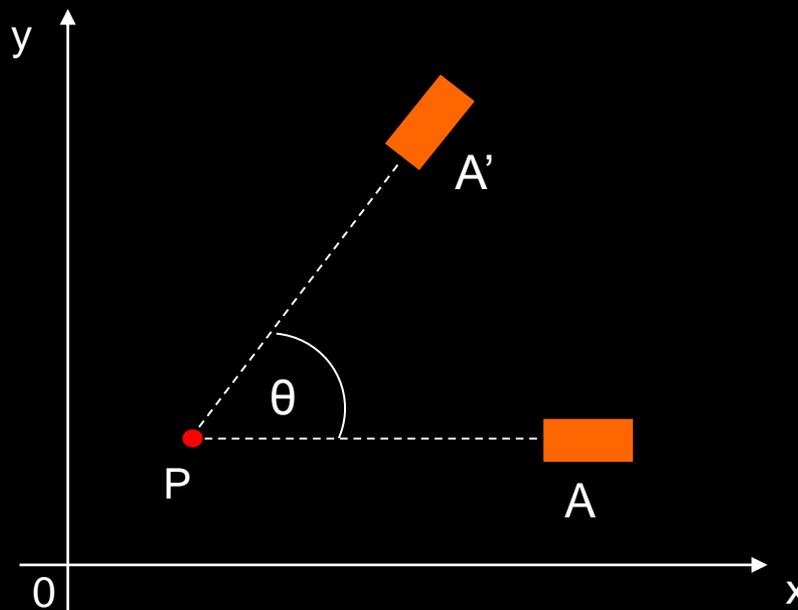


Hasil penskalaan objek terhadap fixed point



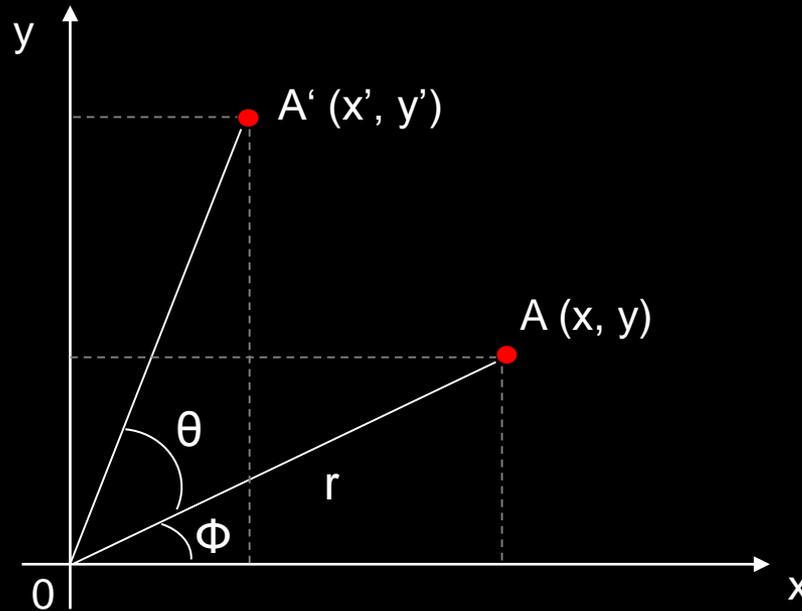
D. Rotasi

- Rotasi 2D suatu objek akan memindahkan objek tersebut berdasarkan garis melingkar.
- Untuk melakukan rotasi pada bidang xy diperlukan sudut rotasi θ dan titik rotasi / pivot point (x_p, y_p) , dimana objek tersebut dirotasi.
- Jika sudut rotasi θ positif, maka arah rotasi berlawanan arah jarum jam.
- Jika sudut rotasi θ negatif, maka arah rotasi searah jarum jam.





- Rotasi dapat dilakukan dengan pivot point yaitu titik pusat koordinat.



dimana:

- r : jarak konstan titik dari titik pusat
- θ : sudut rotasi
- ϕ : sudut posisi suatu titik dengan sumbu horizontal



- Dengan menggunakan fungsi trigonometri, transformasi dapat dinyatakan dengan:

$$x' = r \cos(\Phi + \theta) = r \cos \Phi \cos \theta - r \sin \Phi \sin \theta$$

$$y' = r \sin(\Phi + \theta) = r \cos \Phi \sin \theta + r \sin \Phi \cos \theta$$

- Sedangkan dengan koordinat polar diketahui bahwa:

$$x = r \cos \Phi \quad \text{dan} \quad y = r \sin \Phi$$

- Dengan melakukan substitusi, diperoleh rumus transformasi untuk rotasi suatu titik (x, y) dengan sudut rotasi θ sebagai berikut:

$$x' = x \cos \theta - y \sin \theta$$

$$y' = x \sin \theta + y \cos \theta$$

- Matriks transformasi untuk rotasi dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$P' = R \cdot P$$

dimana:

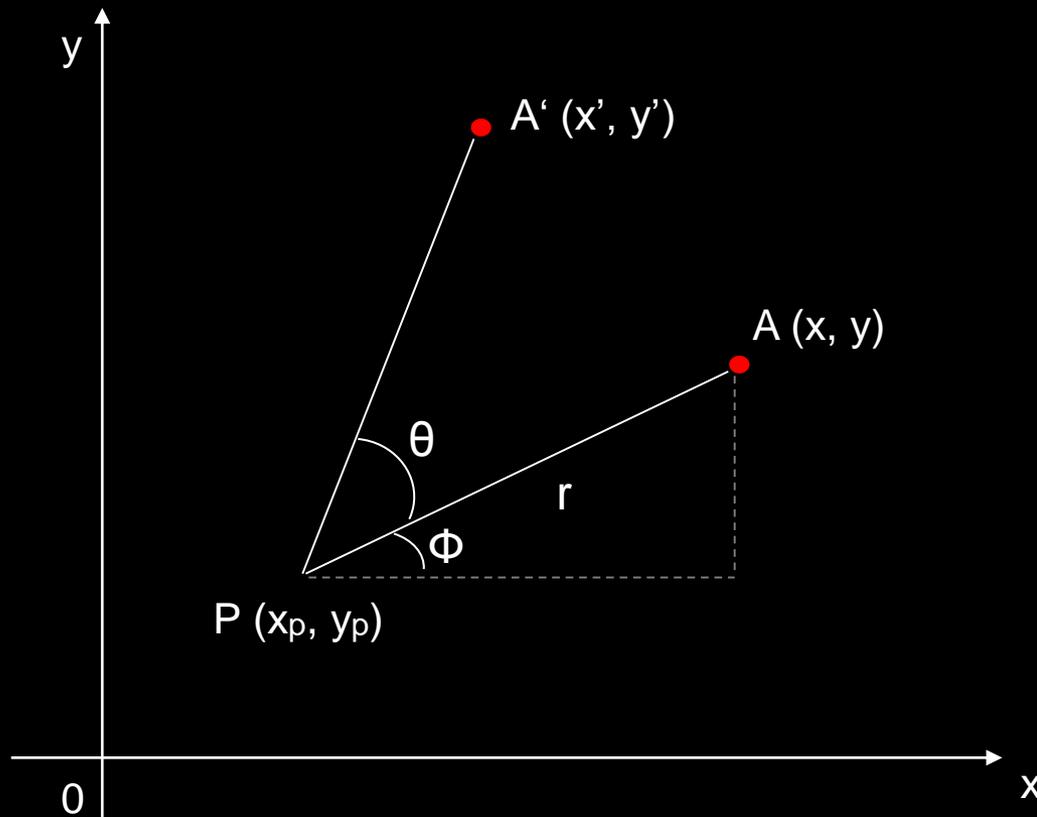
$$R = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

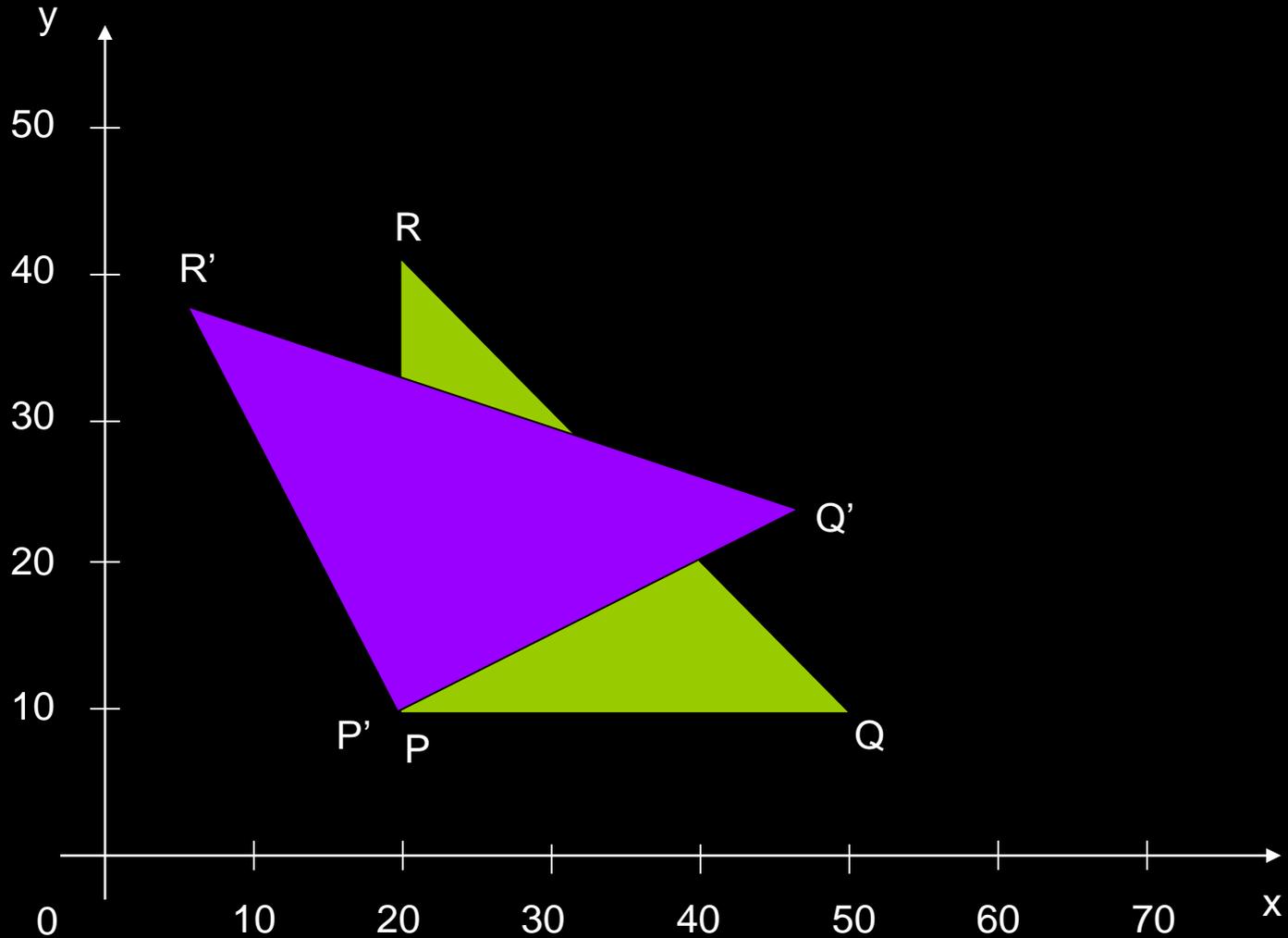


- Rotasi suatu titik terhadap pivot point (x_p, y_p) secara umum dapat ditulis sebagai berikut:

$$x' = x_p + (x - x_p) \cos \theta - (y - y_p) \sin \theta$$

$$y' = y_p + (x - x_p) \sin \theta + (y - y_p) \cos \theta$$





Contoh rotasi dengan $\theta = 30^\circ$ dan pivot point (20,10)

REFLEKSI

- Terhadap sumbu x
 - $X' = X$
 - $Y' = -Y$
- Terhadap sumbu y
 - $X' = -X$
 - $Y' = Y$
- Terhadap sumbu $y = x$
 - $X' = Y$
 - $Y' = X$
- Terhadap sumbu $y = -x$
 - $X' = -Y$
 - $Y' = -X$