Himpunan

umbrella
unicorn
ball
hat
lion
goat
olives
violin
pig
queen
x-ray
rabbit
ice cream
nails
eggs
apple
zebra
sun
kite
moon
fish
jam
acorn
oatmeal
watermelon
dog
turtle
car
eel
yo-yo
igloo

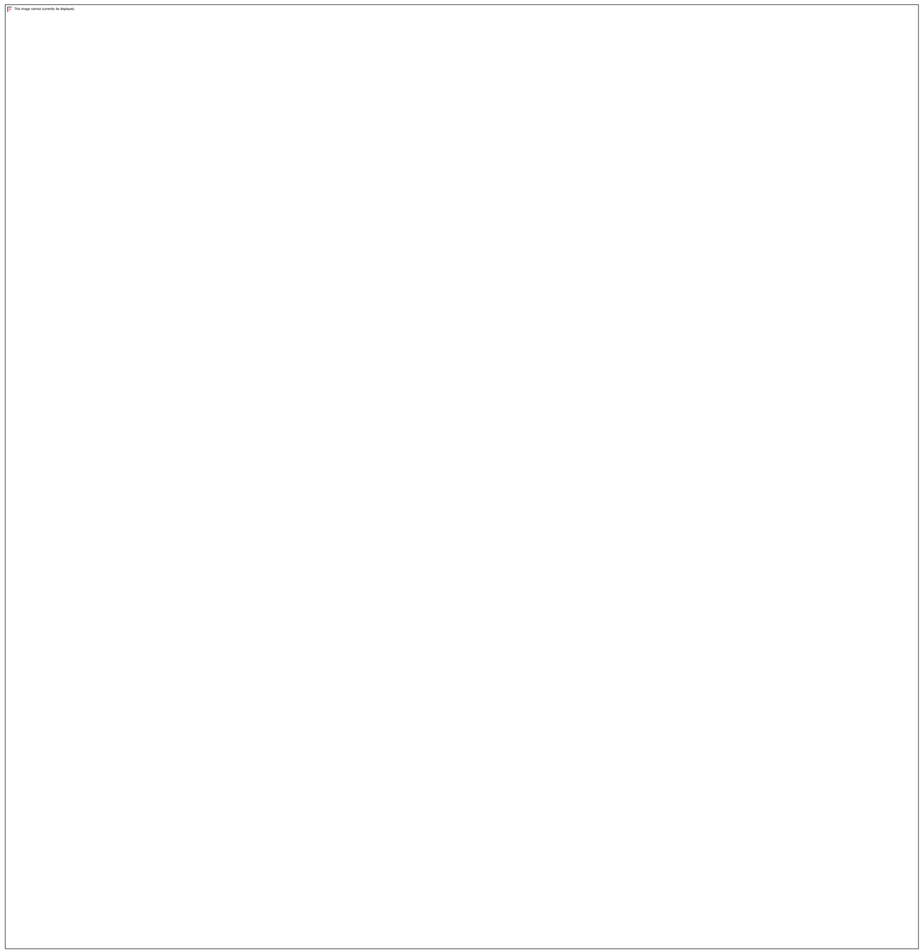
Definisi

- Himpunan (*set*) adalah kumpulan objek-objek yang *berbeda*.

- Objek di dalam himpunan disebut **elemen**, **unsur**, atau **anggota**.

- HMTI adalah contoh sebuah himpunan, di dalamnya berisi anggota berupa mahasiswa. Tiap mahasiswa berbeda satu sama lain.

- Satu *set* huruf (besar dan kecil)



Cara Penyajian Himpunan

1. <u>Enumerasi</u>

Setiap anggota himpunan didaftarkan secara rinci.

Contoh 1.

- Himpunan empat bilangan asli pertama: $A = \{1, 2, 3, 4\}$.
- Himpunan lima bilangan genap positif pertama: $B = \{4, 6, 8, 10\}$.
- $C = \{\text{kucing}, a, \text{Amir}, 10, \text{paku}\}$
- $R = \{ a, b, \{a, b, \mathrm{c}\}, \{a, c\} \}$
- $C = \{a, \{a\}, \{\{a\}\} \}$
- $K = \{ \{\} \}$
- Himpunan 100 buah bilangan asli pertama: $\{1, 2, ..., 100 \}$
- Himpunan bilangan bulat ditulis sebagai $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.

Keanggotaan

$x \in A$: x merupakan anggota himpunan A;

$x \notin A$: x bukan merupakan anggota himpunan A.

- **Contoh 2.**
- Misalkan: $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $R = \{ a, b, \{a, b, \mathrm{c}\}, \{a, c\} \}$
- $K = \{\{\}\}$
- maka

  $3 \in A$

  $\{a, b, c\} \in R$

  $c \notin R$

  $\{\} \in K$

  $\{\} \notin R$

Contoh 3. Bila $P_1 = \{a, b\}$,

$P_2 = \{ \{a, b\} \}$,

$P_3 = \{\{\{a, b\}\}\}$,

maka

$a \in P_1$

$a \notin P_2$

$P_1 \in P_2$

$P_1 \notin P_3$

$P_2 \in P_3$

2. ***Simbol-simbol Baku***

P = himpunan bilangan bulat positif = { 1, 2, 3, ... }

N = himpunan bilangan alami (natural) = { 1, 2, ... }

Z = himpunan bilangan bulat = { ..., -2, -1, 0, 1, 2, ... }

Q = himpunan bilangan rasional

R = himpunan bilangan riil

C = himpunan bilangan kompleks

Himpunan yang universal: **semesta**, disimbolkan dengan U.

Contoh: Misalkan U = {1, 2, 3, 4, 5} dan *A* adalah himpunan bagian dari U, dengan *A* = {1, 3, 5}.

3. ***Notasi Pembentuk Himpunan***

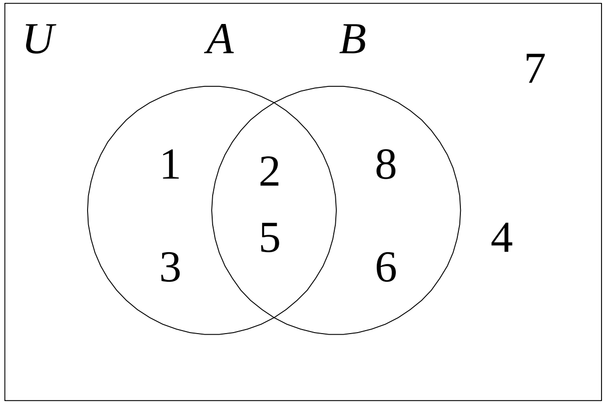
4. Diagram Venn

Contoh 5.

Misalkan U = {1, 2, …, 7, 8},

A = {1, 2, 3, 5} dan B = {2, 5, 6, 8}.

Diagram Venn:



Kardinalitas

Jumlah elemen di dalam A disebut **kardinal** dari himpunan A.
Notasi: $n(A)$ atau $|A|$

Contoh 6.
(i) $B = \{ x \mid x$ merupakan bilangan prima lebih kecil dari 20 $\}$,
atau $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$ maka $|B| = 8$
(ii) $T = \{$kucing, a, Amir, 10, paku$\}$, maka $|T| = 5$
(iii) $A = \{a, \{a\}, \{\{a\}\} \}$, maka $|A| = 3$

Himpunan kosong (*null set*)

- Himpunan dengan kardinal = 0 disebut himpunan kosong (*null set*).
- Notasi : $\emptyset$ atau {}

Contoh 7.

(i) $E = \{ x \mid x < x \}$, maka $n(E) = 0$

(ii) P = { orang Indonesia yang pernah ke bulan }, maka $n(P) = 0$

(iii) $A = \{x \mid x$ adalah akar persamaan kuadrat $x^2 + 1 = 0 \}$, $n(A) = 0$

- himpunan {{ }} dapat juga ditulis sebagai $\{\emptyset\}$
- himpunan {{ }, {{ }}} dapat juga ditulis sebagai $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
- $\{\emptyset\}$ bukan himpunan kosong karena ia memuat satu elemen yaitu himpunan kosong.

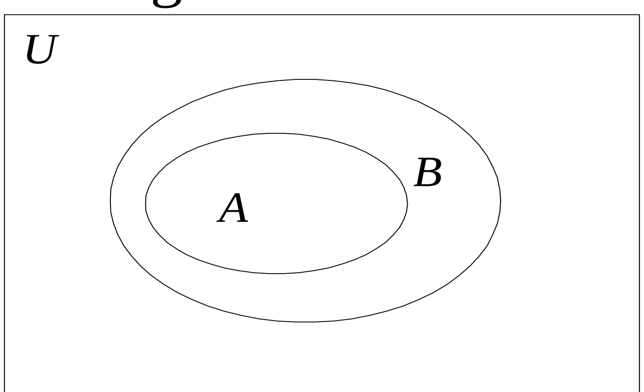
Himpunan Bagian (*Subset*)

- Himpunan A dikatakan himpunan bagian dari himpunan B jika dan hanya jika setiap elemen A merupakan elemen dari B.

- Dalam hal ini, B dikatakan *superset* dari A.

- Notasi: $A \subseteq B$

- Diagram Venn:



Contoh 8.

(i) $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$

(ii) $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3\}$

(iii) $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{R} \subseteq \mathbf{C}$

(iv) Jika $A = \{ (x, y) \mid x + y < 4, x \geq, y \geq 0 \}$ dan

$B = \{ (x, y) \mid 2x + y < 4, x \geq 0$ dan $y \geq 0 \}$, maka $B \subseteq A$.

TEOREMA 1. Untuk sembarang himpunan A berlaku hal-hal sebagai berikut:

(a) A adalah himpunan bagian dari A itu sendiri (yaitu, $A \subseteq A$).

(b) Himpunan kosong merupakan himp. bagian dari A ($\varnothing \subseteq A$).

(c) Jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq C$, maka $A \subseteq C$

- $\emptyset \subseteq A$ dan $A \subseteq A$, maka $\emptyset$ dan A disebut himpunan bagian tak sebenarnya (*improper subset*) dari himpunan A.

  Contoh: $A = \{1, 2, 3\}$, maka $\{1, 2, 3\}$ dan $\emptyset$ adalah *improper subset* dari A.

- $A \subseteq B$ berbeda dengan $A \subset B$

  (i) $A \subset B$: A adalah himpunan bagian dari B tetapi $A \neq B$.
  A adalah himpunan bagian sebenarnya (*proper subset*) dari B.
  Contoh: {1} dan {2, 3} adalah *proper subset* dari {1, 2, 3}

  (ii) $A \subseteq B$: digunakan untuk menyatakan bahwa A adalah himpunan bagian (*subset*) dari B yang memungkinkan $A = B$.

- <u>Latihan</u>

  Misalkan $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Tentukan semua kemungkinan himpunan C sedemikian sehingga $A \subset C$ dan $C \subset B$, yaitu A adalah *proper subset* dari C dan C adalah *proper subset* dari B.

Jawaban:

C harus mengandung semua elemen $A = \{1, 2, 3\}$ dan sekurang-kurangnya satu elemen dari B.

Dengan demikian, $C = \{1, 2, 3, 4\}$ atau
$C = \{1, 2, 3, 5\}$.

C tidak boleh memuat 4 dan 5 sekaligus karena C adalah *proper subset* dari B.

Himpunan yang Sama

- $A = B$ jika dan hanya jika setiap elemen A merupakan elemen B dan sebaliknya setiap elemen B merupakan elemen A.
- $A = B$ jika A adalah himpunan bagian dari B dan B adalah himpunan bagian dari A. Jika tidak demikian, maka $A \neq B$.
- Notasi : $A = B \leftrightarrow A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$

Contoh 9.

(i) Jika $A = \{ 0, 1 \}$ dan $B = \{ x \mid x (x - 1) = 0 \}$, maka $A = B$

(ii) Jika $A = \{ 3, 5, 8, 5 \}$ dan $B = \{5, 3, 8 \}$, maka $A = B$

(iii) Jika $A = \{ 3, 5, 8, 5 \}$ dan $B = \{3, 8\}$, maka $A \neq B$

Untuk tiga buah himpunan, A, B, dan C berlaku aksioma berikut:

(a) $A = A$, $B = B$, dan $C = C$

(b) jika $A = B$, maka $B = A$

(c) jika $A = B$ dan $B = C$, maka $A = C$

Himpunan yang Ekivalen

- Himpunan A dikatakan ekivalen dengan himpunan B jika dan hanya jika kardinal dari kedua himpunan tersebut sama.

- Notasi : $A \sim B \leftrightarrow |A| = |B|$

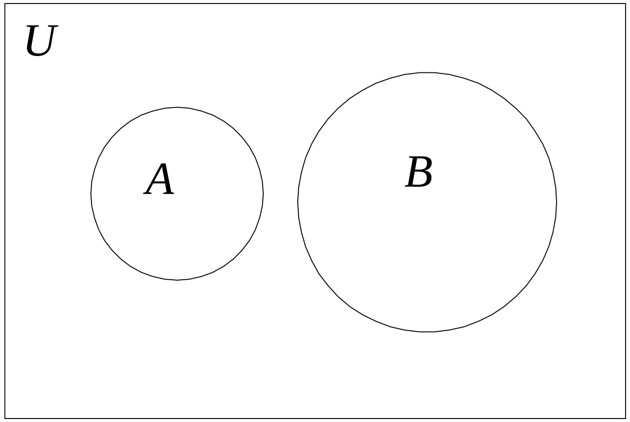
Contoh 10.
Misalkan $A = \{ 1, 3, 5, 7 \}$ dan $B = \{ a, b, c, d \}$, maka
$A \sim B$ sebab $|A| = |B| = 4$

Himpunan Saling Lepas

- Dua himpunan A dan B dikatakan saling lepas (*disjoint*) jika keduanya tidak memiliki elemen yang sama.

- Notasi : A // B

- Diagram Venn:



Contoh 11.

Jika $A = \{ x \mid x \in P, x < 8 \}$ dan $B = \{ 10, 20, 30, ... \}$, maka A // B.

Himpunan Kuasa

- Himpunan kuasa (*power set*) dari himpunan A adalah suatu himpunan yang elemennya merupakan semua himpunan bagian dari A, termasuk himpunan kosong dan himpunan A sendiri.

- Notasi : $P(A)$ atau 2^A

- Jika $|A| = m$, maka $|P(A)| = 2^m$.

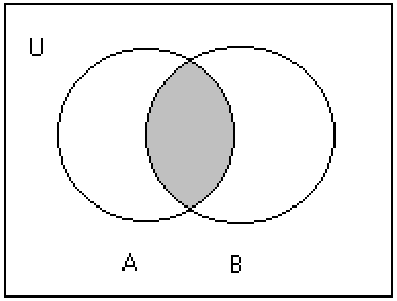
Contoh 12.
Jika $A = \{ 1, 2 \}$, maka $P(A) = \{ \varnothing, \{ 1 \}, \{ 2 \}, \{ 1, 2 \}\}$

Contoh 13.
Himpunan kuasa dari himpunan kosong adalah $P(\varnothing) = \{\varnothing\}$, dan himpunan kuasa dari himpunan $\{\varnothing\}$ adalah $P(\{\varnothing\}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.

Operasi Terhadap Himpunan

1. Irisan (*intersection*)

- Notasi : $A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ dan } x \in B \}$



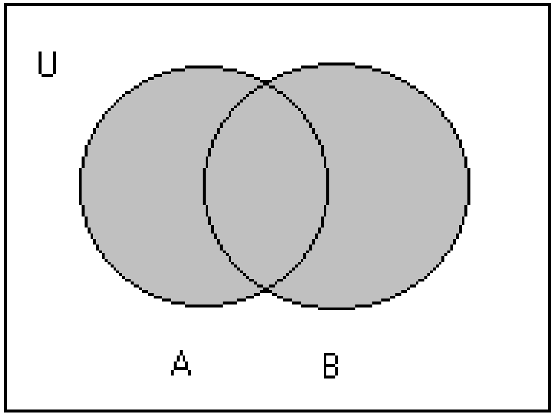
Contoh 14.

(i) Jika $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ dan $B = \{4, 10, 14, 18\}$, maka $A \cap B = \{4, 10\}$

(ii) Jika $A = \{ 3, 5, 9 \}$ dan $B = \{ -2, 6 \}$, maka $A \cap B = \varnothing$. Artinya: A // B

2. Gabungan (*union*)

- Notasi : $A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ atau } x \in B \}$



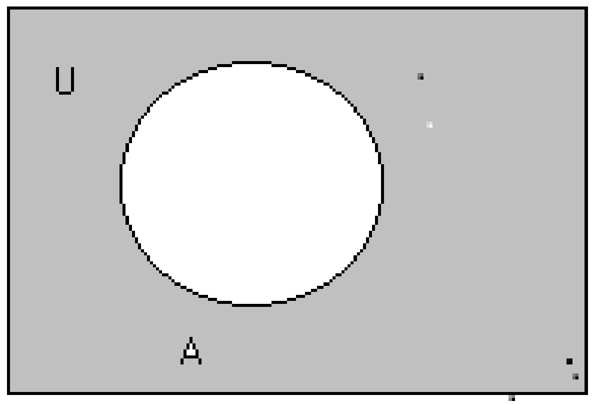
Contoh 15.

(i) Jika $A = \{ 2, 5, 8 \}$ dan $B = \{ 7, 5, 22 \}$, maka $A \cup B =$
$\{ 2, 5, 7, 8, 22 \}$

(ii) $A \cup \varnothing = A$

3. Komplemen (*complement*)

- Notasi : $\overline{A} = \{ x \mid x \in U, x \notin A \}$



Contoh 16.

Misalkan U = { 1, 2, 3, ..., 9 },

(i) jika $A = \{1, 3, 7, 9\}$, maka $\overline{A} = \{2, 4, 6, 8\}$

(ii) jika $A = \{ x \mid x/2 \in P, x < 9 \}$, maka $\overline{A} = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$

Contoh 17. Misalkan:

A = himpunan semua mobil buatan dalam negeri
B = himpunan semua mobil impor
C = himpunan semua mobil yang dibuat sebelum tahun 1990
D = himpunan semua mobil yang nilai jualnya kurang dari Rp 100 juta
E = himpunan semua mobil milik mahasiswa universitas tertentu

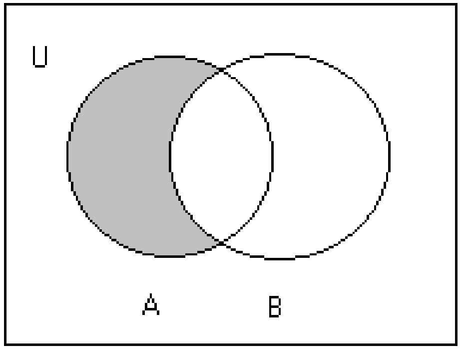
(i) "mobil mahasiswa di universitas ini produksi dalam negeri atau diimpor dari luar negeri" → $(E \cap A) \cup (E \cap B)$ atau $E \cap (A \cup B)$

(ii) "semua mobil produksi dalam negeri yang dibuat sebelum tahun 1990 yang nilai jualnya kurang dari Rp 100 juta" → $A \cap C \cap D$

(iii) "semua mobil impor buatan setelah tahun 1990 mempunyai nilai jual lebih dari Rp 100 juta" → $\overline{C} \cap \overline{D} \cap B$

4. Selisih (*difference*)

- Notasi : $A - B = \{ x \mid x \in A \text{ dan } x \notin B \} = A \cap \overline{B}$



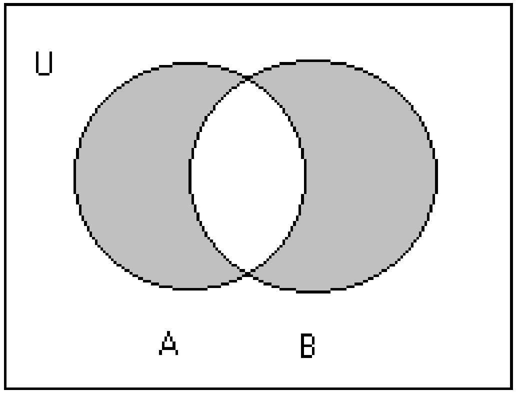
Contoh 18.

(i) Jika $A = \{ 1, 2, 3, ..., 10 \}$ dan $B = \{ 2, 4, 6, 8, 10 \}$, maka $A - B = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$ dan $B - A = \varnothing$

(ii) $\{1, 3, 5\} - \{1, 2, 3\} = \{5\}$, tetapi $\{1, 2, 3\} - \{1, 3, 5\} = \{2\}$

5. Beda Setangkup (*Symmetric Difference*)

- Notasi: $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$



Contoh 19.

Jika A = { 2, 4, 6 } dan B = { 2, 3, 5 }, maka $A \oplus B$ = { 3, 4, 5, 6 }

Contoh 20. Misalkan

U = himpunan mahasiswa
P = himpunan mahasiswa yang nilai ujian UTS di atas 80
Q = himpunan mahasiswa yang nilain ujian UAS di atas 80

Seorang mahasiswa mendapat nilai A jika nilai UTS dan nilai UAS keduanya di atas 80, mendapat nilai B jika salah satu ujian di atas 80, dan mendapat nilai C jika kedua ujian di bawah 80.

(i) "Semua mahasiswa yang mendapat nilai A" : $P \cap Q$

(ii) "Semua mahasiswa yang mendapat nilai B" : $P \oplus Q$

(iii) "Ssemua mahasiswa yang mendapat nilai C" : U – ($P \cup Q$)

TEOREMA 2. Beda setangkup memenuhi sifat-sifat berikut:

(a) $A \oplus B = B \oplus A$ (hukum komutatif)

(b) $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$ (hukum asosiatif)

6. Perkalian Kartesian (*cartesian product*)

- Notasi: $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ dan } b \in B\}$

Contoh 20.

(i) Misalkan $C = \{ 1, 2, 3 \}$, dan $D = \{ a, b \}$, maka

$$C \times D = \{ (1, a), (1, b), (2, \mathrm{a}), (2, b), (3, a), (3, b) \}$$

(ii) Misalkan $A = B$ = himpunan semua bilangan riil, maka

$A \times B$ = himpunan semua titik di bidang datar

Catatan:

1. Jika A dan B merupakan himpunan berhingga, maka:
   $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.
2. $(a, b) \neq (b, a)$.
3. $A \times B \neq B \times A$ dengan syarat A atau B tidak kosong.

   Pada Contoh 20(i) di atas, $C = \{ 1, 2, 3 \}$, dan $D = \{ a, b \}$,
   $D \times C = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3) \}$
   $C \times D = \{ (1, a), (1, b), (2, \mathrm{a}), (2, b), (3, a), (3, b) \}$
   $D \times C \neq C \times D$.

4. Jika $A = \varnothing$ atau $B = \varnothing$, maka $A \times B = B \times A = \varnothing$

Contoh 21. Misalkan

A = himpunan makanan = { s = soto, g = gado-gado, n = nasi goreng, m = mie rebus }

B = himpunan minuman = { c = coca-cola, t = teh, d = es dawet }

Berapa banyak kombinasi makanan dan minuman yang dapat disusun dari kedua himpunan di atas?

Jawab:
$|A \times B| = |A| \cdot |B| = 4 \cdot 3 = 12$ kombinasi dan minuman, yaitu $\{(s, c), (s, t), (s, d), (g, c), (g, t), (g, d), (n, c), (n, t), (n, d), (m, c), (m, t), (m, d)\}$.

Contoh 21. Daftarkan semua anggota himpunan berikut:

(a) $P(\varnothing)$ (b) $\varnothing \times P(\varnothing)$ (c) $\{\varnothing\}\times P(\varnothing)$ (d) $P(P(\{3\}))$

Penyelesaian:

(a) $P(\varnothing) = \{\varnothing\}$

(b) $\varnothing \times P(\varnothing) = \varnothing$ (ket: jika $A = \varnothing$ atau $B = \varnothing$ maka $A \times B = \varnothing$)

(c) $\{\varnothing\}\times P(\varnothing) = \{\varnothing\}\times \{\varnothing\} = \{(\varnothing,\varnothing))$

(d) $P(P(\{3\})) = P(\{ \varnothing, \{3\} \}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{3\}\}, \{\varnothing, \{3\}\} \}$

Latihan

Misalkan A adalah himpunan. Periksalah apakah setiap pernyataan di bawah ini benar atau salah dan jika salah, bagaimana seharusnya:

(a) $A \cap P(A) = P(A)$
(b) $\{A\} \cup P(A) = P(A)$
(c) $A - P(A) = A$
(d) $\{A\} \in P(A)$
(e) $A \subseteq P(A)$

(a) salah, seharusnya $A \cap P(A) = \varnothing$
(b) benar
(c) benar
(d) salah, seharusnya $\{A\} \subseteq P(A)$
(e) salah, seharusnya $A \in P(A)$

Hukum-hukum Himpunan

- Disebut juga sifat-sifat (*properties*) himpunan
- Disebut juga hukum aljabar himpunan

1. Hukum identitas: – $A \cup \emptyset = A$ – $A \cap U = A$	2. Hukum *null*/dominasi: – $A \cap \emptyset = \emptyset$ – $A \cup U = U$
3. Hukum komplemen: – $A \cup \overline{A} = U$ – $A \cap \overline{A} = \emptyset$	4. Hukum idempoten: – $A \cup A = A$ – $A \cap A = A$

5. Hukum involusi: – $\overline{(\overline{A})} = A$	6. Hukum penyerapan (absorpsi): – $A \cup (A \cap B) = A$ – $A \cap (A \cup B) = A$
7. Hukum komutatif: – $A \cup B = B \cup A$ – $A \cap B = B \cap A$	8. Hukum asosiatif: – $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ – $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
9. Hukum distributif: – $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ – $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	10. Hukum De Morgan: – $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ – $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
11. Hukum 0/1 – $\overline{\varnothing} = U$ – $\overline{U} = \varnothing$	